Lemma 1.3. *Sei $\mathcal{A}_0$ eine Algebra auf Ω und $P_0\colon \mathcal{A}_0 \to [0,\infty]$ mit $P_0(\emptyset) = 0$. Eine Menge $A \in \mathcal{A}_0$ heißt P_0-*messbar*, wenn für alle $B \in \mathcal{A}_0$ gilt*

$$P_0(A \cap B) + P_0(A^c \cap B) = P_0(B).$$

Dann ist das Mengensystem $\mathcal{A}_1$ der P_0-messbaren Mengen eine Algebra und P_0 erfüllt

$$P_0\Big(\bigcup_{k=1}^{n}(A_k \cap B)\Big) = \sum_{k=1}^{n} P_0(A_k \cap B),$$

wenn $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_1$ paarweise disjunkt sind und $B \in \mathcal{A}_0$.

Aufgabe 2.1. (5 Punkte)
Beweisen Sie Lemma 1.3 durch die folgenden Schritte:

i) Seien A_1, A_2 P_0-messbare Mengen, dann ist $A_1 \cap A_2$ auch P_0-messbar.

ii) Zeigen Sie mit Hilfe von i), dass $\mathcal{A}_1$ eine Algebra ist.

iii) Ergänzen Sie den Beweis, indem Sie die letzte Aussage des Lemmas beweisen.

Definition. *Eine Abbildung $P\colon \mathcal{A}_0 \to [0,\infty]$ heißt* äusseres Maß*, wenn gilt*

- $P(\emptyset) = 0$,
- *wenn $A_1 \subseteq A_2$ in $\mathcal{A}_0$ liegen, so gilt $P(A_1) \leq P(A_2)$;*
- *wenn $A_1, A_2, \ldots$ in $\mathcal{A}_0$ liegen, so gilt*

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Lemma 1.4 (Carathéodory's Lemma)**.** *Sei P ein äusseres Maß auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$. Dann bilden die P-messbaren Mengen eine σ-Algebra $\mathcal{A}'$ auf der P σ-additiv ist, so dass P sogar ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A}')$ ist.*

Aufgabe 2.2. (5 Punkte)
Beweisen Sie Lemma 1.4 mit Hilfe von Lemma 1.3.

Aufgabe 2.3. (5 Punkte)
Für die umseitig stehenden Mengensysteme von Teilmengen von $\mathbb{R}$ bestimmen Sie, ob es sich um

i) einen Erzeuger der Borel σ-Algebra,

ii) ein schnittstabiles Mengensystem,

iii) eine Algebra handelt.

Abgabetermin: bis Dienstag 24.04.2018 um 12 Uhr, Raum 304 MI.
Fragen: `pgracar@math.uni-koeln.de`

Die Mengensysteme sind

a) $\mathcal{P} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$,

b) $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A$ endlich oder A^c endlich$\}$,

c) $\mathcal{H} = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 2.4. (5 Punkte)
Sei $V \subseteq \mathbb{N}$. Wir sagen, dass V Cesàro-Maß $\gamma(V)$ hat und schreiben $V \in \text{CES}$, wenn

$$\gamma(V) := \lim_{n\to\infty} \frac{\#(V \cap \{1, 2, 3, \dots, n\})}{n}$$

existiert. Geben Sie ein Beispiel für Mengen $A, B \in \text{CES}$, für die $A \cap B \notin \text{CES}$. Somit ist CES keine Algebra.