Aufgabe 3.1. (4 Punkte)
Seien X_1, X_2 unabhängig uniformverteilte Punkte im Interval $(0,1)$. Diese Punkte brechen das Interval in drei Teilintervalle mit Längen Y_1, Y_2, Y_3.

a) Beschreiben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ auf dem die Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, Y_3 \colon \Omega \to (0,1)$ erklärt werden können.

b) Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Dreieck mit Seitenlängen Y_1, Y_2, Y_3 existiert.

Lemma 1.7 (Doppelfolgenlemma)**.** *Sei $(a_{k,n} \colon k, n \in \mathbb{N})$ eine Doppelfolge mit Werten in $[0, \infty]$, so dass für jedes feste k die Folge $(a_{k,n} \colon n \in \mathbb{N})$ und für jedes feste n die Folge $(a_{k,n} \colon k \in \mathbb{N})$ monoton wachsend ist. Dann gilt*

$$\lim_k \lim_n a_{k,n} = \lim_n \lim_k a_{k,n},$$

und alle involvierten Limiten sind monoton.

Aufgabe 3.2. (5 Punkte)
Beweisen Sie Lemma 1.7.

Aufgabe 3.3. (5 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P) = \big((0,1), \mathcal{B}, \mu\big)$ wobei μ das Lebesguemaß und $\mathcal{B}$ die Borelsche σ-Algebra sind. Finden Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen

$$X(\omega) := \frac{1}{\lambda} \log \frac{1}{1-\omega},$$

wobei λ ein positiver Parameter ist.

Aufgabe 3.4. (6 Punkte)
Sei Ω eine nichtleere Menge und seien $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Die von X erzeugte σ-Algebra ist definiert als $\sigma(X) := \{X^{-1}(B) \colon B \in \mathcal{B}\}$, wobei $\mathcal{B}$ die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ ist. Beweisen Sie dass:

$$Y \text{ ist } \sigma(X)\text{-messbar } \Leftrightarrow \exists \text{ eine messbare Funktion } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } Y = f \circ X.$$

Der Beweis kann in 5 Schritten erfolgen:

i) Zeigen Sie, dass $\Leftarrow$ gilt.

ii) Zeigen Sie, dass $\Rightarrow$ für $Y = 1_A$ gilt, wobei $A \in \sigma(X)$.

iii) Zeigen Sie, dass $\Rightarrow$ für $Y = \sum_{i=1}^n c_i 1_{A_i}$ gilt, wobei $n \in \mathbb{N}$, $A_i \in \sigma(X)$ und $c_i \in \mathbb{R}$.

iv) Zeigen Sie, dass $\Rightarrow$ für $Y \geq 0$ gilt.

v) Zeigen Sie, dass $\Rightarrow$ für alle $\sigma(X)$-messbaren Y gilt.

Abgabetermin: bis Mittwoch 02.05.2018 um 12 Uhr, Raum 304 MI.
Fragen: `pgracar@math.uni-koeln.de`