Aufgabe 4.1. (6 Punkte)

a) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion auf dem kompakten Interval $[a,b]$. Zeigen Sie, dass f integrierbar auf $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ ist und

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f\,dP,$$

wobei $\Omega = [a,b]$, $\mathcal{B}$ die Borelsche σ-Algebra und P das Lebesguemaß auf $[a,b]$ ist.

b) Ist $X\colon (\Omega, \mathcal{A}, P) \to [0,\infty]$ integrierbar, so gilt

$$\int X\,dP = \int_0^\infty P(\{\omega\colon X(\omega) \geq x\})\,dx,$$

wobei das Integral auf der rechten Seite ein uneigentliches Riemann-Integral ist.

Aufgabe 4.2. ***(Scheffé's Lemma)*** (4 Punkte)
Seien X_n, X integrierbare, nichtnegative Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, so dass $X_n \to X$. Zeigen Sie, dass

$$\int |X_n - X|\,dP \to 0 \quad \text{genau dann, wenn} \quad \lim_{n\to\infty} \int X_n\,dP = \int X\,dP.$$

Aufgabe 4.3. (6 Punkte)
Sei Ω die Menge aller reellwertigen Folgen und $\mathcal{A}_k$ die von den Mengen $\big\{(\omega_n)\colon \omega_1 \in B_1, \dots, \omega_k \in B_k\big\}$, für $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, erzeugte σ-Algebra. Die Elemente von $\mathcal{A}_k$ können geschrieben werden als

$$A_k = \{(\omega_n)\colon (\omega_1, \dots, \omega_k) \in B_k\},$$

für $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$. Auf der Algebra $\mathcal{A}_0 := \bigcup_k \mathcal{A}_k$ definieren wir $P_0\colon \mathcal{A}_0 \to [0,1]$ durch

$$P_0\big(\{(\omega_n)\colon (\omega_1, \dots, \omega_k) \in B_k\}\big) = P_1 \otimes \cdots \otimes P_k(B_k).$$

Zeigen Sie: Ist (H_n) eine fallende Folge von Mengen in $\mathcal{A}_0$ und existiert $\epsilon > 0$ so, dass $P_0(H_n) \geq \epsilon$ für alle n, so ist $\bigcap_n H_n \neq \emptyset$.

Aufgabe 4.4. (4 Punkte)
Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen, so dass

$$X_n = \begin{cases} n^2 - 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } n^{-2} \\ -1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - n^{-2}, \end{cases}$$

und $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}S_n = 0$ aber $\frac{S_n}{n} \to -1$ fast sicher.

Abgabetermin: bis Dienstag 08.05.2018 um 12 Uhr, Raum 304 MI.
Fragen: `pgracar@math.uni-koeln.de`