**Aufgabe 5.1.** (4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zwei $\sigma$-Algebren $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}$ heißen unabhängig, wenn alle Paare von Ereignissen $G \in \mathcal{G}$, $H \in \mathcal{H}$ unabhängig sind. Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ genau dann unabhängig sind, wenn

$$P(I \cap J) = P(I)P(J), \quad \text{für alle } I \in \mathcal{I}, J \in \mathcal{J},$$

für schnittstabile Erzeuger $\mathcal{I}$ von $\mathcal{G}$ und $\mathcal{J}$ von $\mathcal{H}$.

**Aufgabe 5.2.** (6 Punkte)
Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Sei $\mathcal{T}_n$ die von $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$ erzeugte $\sigma$-Algebra. Definiere

$$\mathcal{T} := \bigcap_n \mathcal{T}_n.$$

a) Welche der folgenden Ereignisse liegen immer in $\mathcal{T}$?

  i) $\{\lim_{n\to\infty} X_n \text{ existiert}\}$,
  ii) $\{\sum_{k=1}^\infty X_k \text{ konvergiert}\}$,
  iii) $\{\sum_{k=1}^\infty X_k \leq 1\}$,
  iv) $\{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \leq 1\}$.

b) **(Kolmogorovs 0-1 Gesetz)**
Zeigen Sie, dass für jedes Ereignis $E \in \mathcal{T}$ entweder $P(E) = 0$ oder $P(E) = 1$.

**Aufgabe 5.3.** (5 Punkte)
Sei $X : \Omega \to (0,1)$ eine uniform verteilte Zufallsvariable. Definiere $X_n : \Omega \to \{0,1\}$ durch

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \lfloor 2^n X \rfloor \text{ gerade ist,} \\ 1 & \text{wenn } \lfloor 2^n X \rfloor \text{ ungerade ist,} \end{cases}$$

wobei $\lfloor a \rfloor$ der ganzzahlige Anteil von $a$ ist. Zeigen Sie, dass $X_1, X_2, \ldots$ eine unabhängige Folge von Bernoulli($\frac{1}{2}$) verteilten Zufallsvariablen ist.

**Aufgabe 5.4.** (5 Punkte)
Sei $X_1, X_2 \ldots$ eine Folge von Zufallsvariablen, so dass

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{n,m \geq k} \mathbb{E}[(X_n - X_m)^2] = 0.$$

Zeigen Sie, dass eine quadratisch integrierbare Zufallsvariable $X$ existiert mit

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_n - X)^2] = 0.$$

Abgabetermin: bis Dienstag 15.05.2018 um 12 Uhr, Raum 304 MI.
Fragen: `pgracar@math.uni-koeln.de`