Aufgabe 6.1. (5 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Sei X quadratisch integrierbar und $Y := \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$. Zeigen Sie, dass wenn $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2]$, dann gilt $X = Y$ fast sicher.

Aufgabe 6.2. (6 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Beweisen Sie die folgenden Vertauschungssätze für die bedingte Erwartung.

Monotone Konvergenz Wenn $0 \leq X_n \uparrow X$, so folgt

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}] \uparrow \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \text{ fast sicher.}$$

Lemma von Fatou Wenn $0 \leq X_n$ integrierbar ist, so gilt

$$\mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty} X_n \mid \mathcal{F}] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}] \text{ fast sicher.}$$

Dominierte Konvergenz Existiert eine integrierbare Zufallsvariable Z mit $|X_n| \leq Z$ für alle n, und gilt $X_n \to X$ fast sicher, so folgt

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}] \to \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \text{ fast sicher.}$$

Aufgabe 6.3. (5 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X, Y zwei integrierbare Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass wenn $\mathbb{E}[X \mid \sigma(Y)] = Y$ und $\mathbb{E}[Y \mid \sigma(X)] = X$, dann gilt $X = Y$ fast sicher.
Hinweis: Betrachten Sie $\mathbb{E}[X1_{\{Y \leq c\}}]$ und $\mathbb{E}[Y1_{\{X \leq c\}}]$ für $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6.4. (4 Punkte)
Sei $\Omega = \{-1, 0, 1\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(\{-1\}) = P(\{0\}) = P(\{1\}) = 1/3$. Betrachten Sie die σ-Algebren

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{-1\}, \{0, 1\}, \{-1, 0, 1\}\} \quad \text{und} \quad \mathcal{G} = \{\emptyset, \{-1, 0\}, \{1\}, \{-1, 0, 1\}\}.$$

Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\omega) = \omega$. Berechnen Sie

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \mid \mathcal{G}] \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{F}].$$

Abgabetermin: bis Dienstag 29.05.2018 um 12 Uhr, Raum 304 MI.
Fragen: `pgracar@math.uni-koeln.de`