Aufgabe 7.1. (4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ eine σ-Algebra und $X\colon \Omega \to \mathcal{X}$ eine Zufallsvariable, die Werte in einer abzählbaren Menge $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$ annimmt. Zeigen Sie, dass es eine Abbildung $P_{\mathcal{F}}\colon \mathcal{P}(\mathcal{X}) \times \Omega \to [0,1]$ gibt mit

i) für jedes $\omega \in \Omega$ ist $P_{\mathcal{F}}(\cdot, \omega)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ und

ii) für jedes $A \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ ist $P_{\mathcal{F}}(A, \cdot)$ eine bedingte Erwartung von $1_{\{X \in A\}}$ gegeben $\mathcal{F}$.

Die Abbildung $P_{\mathcal{F}}$ heißt *bedingte Verteilung* von X gegeben $\mathcal{F}$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass fast sicher $\mathbb{E}[1_{\{X=x_i\}} \,|\, \mathcal{F}]$, $i \in \mathbb{N}$ eine Wahrscheinlichkeitsfolge ist. Benutzen Sie diese Wahrscheinlichkeitsfolge, um das Wahrscheinlichkeitsmaß $P_{\mathcal{F}}(\cdot, \omega)$ für fast alle $\omega \in \Omega$ zu konstruieren.

Aufgabe 7.2. (6 Punkte)
Sei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = 1/2$. Definiere $S_0 := 0$, $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ und sei

$$T := \min\{n\colon S_n = 1\}.$$

Das Ziel der Aufgabe ist zu zeigen, dass fast sicher $T < \infty$.

(a) Für $\theta \in \mathbb{R}$ zeigen Sie, dass $M_n = (\cosh\theta)^{-n} e^{\theta S_n}$ ein Martingal definiert.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[M_{T \wedge n}] = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Für den Fall $\theta > 0$ folgern Sie durch Grenzübergang $n \to \infty$, dass

$$\mathbb{E}[(\cosh\theta)^{-T}] = e^{-\theta}.$$

(d) Durch Grenzübergang $\theta \downarrow 0$ folgern Sie, dass $P(T < \infty) = 1$.

Aufgabe 7.3. (5 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_n)$ eine Filtration. Sei $Y_0, Y_1, \dots$ eine adaptierte Folge integrierbarer Zufallsvariablen. Nehmen Sie an, dass reellwertigen Folgen u_n und v_n existieren so dass

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] = u_n Y_n + v_n.$$

Finden Sie zwei reellwertige Folgen (a_n) und (b_n), so dass $M_n := a_n Y_n + b_n$ ein Martingal definiert.

Aufgabe 7.4. (5 Punkte)
Zur Zeit $n = 0$ plazieren wir N Kugeln beliebig in K Urnen und ändern dies dann in jedem Schritt wie folgt: Wähle eine der Kugeln gleichmäßig zufällig aus (das heißt: jede Kugel wird mit der Wahrscheinlichkeit $1/N$ gewählt) und lege sie in eine der ebenfalls zufällig gewählten Urnen (das heißt: jede Urne wird mit Wahrscheinlichkeit $1/K$ gewählt). Sei X_n die Anzahl der Kugeln in der ersten Urne nach n Schritten und $(\mathcal{F}_n)$ die natürliche Filtration.

(a) Drücken Sie $\mathbb{E}[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n]$ mit Hilfe von X_n aus.

(b) Mit Hilfe von Aufgabe 7.3, finden Sie Werte a_n, b_n, so dass $Z_n := a_n X_n + b_n$ ein Martingal definiert.