Aufgabe 8.1. (5 Punkte)
Beschreiben Sie alle Martingale, die nur Werte in $\{-1, 0, 1\}$ annehmen.

Aufgabe 8.2. (5 Punkte)
Sei (X_n) eine Folge von Zufallsvariablen, die Werte in $[0, 1]$ annehmen. Seien $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$, $X_0 = a \in [0, 1]$ und

$$P\left(X_{n+1} = \tfrac{X_n}{2} \,|\, \mathcal{F}_n\right) = 1 - X_n, \quad P\left(X_{n+1} = \tfrac{1+X_n}{2} \,|\, \mathcal{F}_n\right) = X_n.$$

(a) Zeigen Sie, dass (X_n) ein Martingal ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2] = \frac{1}{4}\mathbb{E}[X_n(1 - X_n)]$.

Aufgabe 8.3. (5 Punkte)
Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängig, identisch verteilte Zufallsvariable mit

$$P(X_i = 1) = p, P(X_i = -1) = q, \text{ wobei } 0 < p = 1 - q < 1.$$

Setze $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ und wähle eine ganze Zahl a. Sei

$$S_n = a + X_1 + \cdots + X_n.$$

Zeigen Sie, dass durch

$$M_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \text{ und } N_n = S_n - n(p - q)$$

Martingale definiert sind.

Aufgabe 8.4. (5 Punkte)
Seien (X_n), (Y_n) zwei Supermartingale auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und τ eine Stoppzeit bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_n)$. Sei $X_\tau \leq Y_\tau$ auf $\{\tau < \infty\}$. Wir definieren $Z_n = Y_n$ auf $\{n < \tau\}$ und $Z_n = X_n$ auf $\{n \geq \tau\}$.

(a) Zeigen Sie, dass (Z_n) ein Supermartingal ist.

(b) Zeigen Sie, dass wenn (X_n), (Y_n) Martingale sind und $X_\tau = Y_\tau$, dann ist (Z_n) auch ein Martingal.