**Aufgabe 9.1.** (5 Punkte)
In einem gut gemischten Kartenspiel von 52 Karten werden die Karten nacheinander aufgedeckt. Wenn die erste Herzkarte aufgedeckt wurde, was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die nächste Karte ebenfalls eine Herzkarte ist?

*Hinweis*: Sei $X_n$ der Anteil der Herzkarten im Stapel. Zeige, dass $X_n$ ein Martingal definiert und wende den Doobschen Stoppsatz an.

**Aufgabe 9.2.** (5 Punkte)
Ein fairer Würfel wird wiederholt geworfen. Sei $T_1$ der erste Zeitpunkt an dem drei aufeinanderfolgende Sechsen geworfen wurden, $T_2$ der erste Zeitpunkt an dem eine Sechs gefolgt von einer Fünf gefolgt von einer weiteren Sechs geworfen wurde und sei $T_3$ der erste Zeitpunkt an dem eine Sechs gefolgt von einer Fünf gefolgt von einer Vier geworfen wurde. In Erwartung, welche dieser Zeiten ist die kleinste und welche die größte?

**Aufgabe 9.3.** (5 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $(X_n)$ ein Submartingal, für das gilt $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}|X_n| < \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $n$ die Folge $(\mathbb{E}[X_m^+ \,|\, \mathcal{F}_n])_{m\geq n}$ wachsend in $m$ ist.

(b) Sei $M_n = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}[X_m^+ \,|\, \mathcal{F}_n]$. Zeigen Sie, dass $(M_n)$ ein positives, integrierbares Martingal ist.

(c) Sei $Y_n = M_n - X_n$. Zeigen Sie, dass $(Y_n)$ ein positives, integrierbares Supermartingal ist.

**Aufgabe 9.4.** (5 Punkte)
Seien $p$ und $q$ zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf einer abzählbaren Menge $E$ mit $p \neq q$ und $q(x) > 0$ für jedes $x \in E$. Sei $(X_n)$ eine Folge von u.i.v. Zufallsvariablen auf $E$ mit Wahrscheinlichkeitsverteilung $q$. Zeigen Sie, dass

$$Y_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{p(X_k)}{q(X_k)}$$

ein positives Martingal mit fast sicherem Grenzwert 0 ist.
*Hinweis:* Betrachten Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[\sqrt{Y_n}]$.

Abgabetermin: bis Dienstag 19.06.2018 um 12 Uhr, Raum 304 MI.
Fragen: `pgracar@math.uni-koeln.de`