Aufgabe 10.1. (4 Punkte)
Finden Sie Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$, die in L^1 konvergieren, aber nicht fast sicher.

Aufgabe 10.2. (6 Punkte)
Betrachten Sie das Modell des Münzwurfs mit einer zufällige uniform verteilten Münze, d.h. für die Anzahl Y_n der Köpfe unter den ersten n Würfen gilt

$$P(Y_n = k) = \binom{n}{k} \int_0^1 \theta^k (1-\theta)^{n-k}\, d\theta.$$

(a) Zeigen Sie, dass eine Zufallsvariable Y existiert, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Y_n}{n} = Y \text{ fast sicher und } \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2}.$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $0 < \theta < 1$

$$N_n^\theta := \frac{(n+1)!}{Y_n!(n-Y_n)!} \theta^{Y_n} (1-\theta)^{n-Y_n}$$

ein Martingal definiert.

(c) Sei $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$. Zeigen Sie, dass für alle $0 < a < b < 1$ gilt

$$\mathbb{E}[1_{\{a<Y<b\}} \mid \mathcal{F}_n] = \int_a^b N_n^\theta \, d\theta \qquad \text{fast sicher.}$$

Aufgabe 10.3. (5 Punkte)
Sei (M_n) ein beschränktes Martingal und $X_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}(M_k - M_{k-1})$.
Zeigen Sie, dass (X_n) ein Martingal ist, das fast sicher und in L^2 konvergiert.

Aufgabe 10.4. (5 Punkte)
Sei (Y_n) eine Folge von positiven u.i.v. Zufallsvariablen mit Erwartungswert 1. Setze $X_0 := 1$ und $X_n := \prod_{k=1}^n Y_k$.

(a) Zeigen Sie, dass (X_n) ein Martingal ist und folgern Sie daraus, dass $(\sqrt{X_n})$ ein Supermartingal ist.

(b) Sei zunächst $\prod_{n=1}^\infty \mathbb{E}[\sqrt{Y_n}] = 0$.

Konvergieren $(\sqrt{X_n})$ und (X_n) und wenn ja, was ist die Grenzwert?

(c) Sei jetzt $\prod_{k=1}^\infty \mathbb{E}[\sqrt{Y_n}] > 0$.

Zeigen Sie, dass $(\sqrt{X_n})$ eine Cauchy-Folge in L^2 ist und folgern Sie daraus, dass die Folge (X_n) in L^1 konvergiert.

Abgabetermin: bis Dienstag 26.06.2018 um 12 Uhr, Raum 304 MI.
Fragen: `pgracar@math.uni-koeln.de`