Aufgabe 11.1. (7 Punkte)
Sei $a > 0$. Zeigen Sie, dass

(a) wenn (X_n) ein nichtnegatives Submartingal ist, gilt

$$P\Big(\max_{0\le k\le n} X_k \ge a\Big) \le \frac{1}{a}\mathbb{E}[X_n];$$

(b) wenn (X_n) ein nichtnegatives Supermartingal ist, gilt

$$P\Big(\sup_{k\ge 0} X_k \ge a\Big) \le \frac{1}{a}\mathbb{E}[X_0].$$

Aufgabe 11.2. (6 Punkte)
Sei $m < 0$ und (X_n) eine Folge von unabhängigen, zu den Parametern m und σ^2 normalverteilten Zufallsvariablen. Sei $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ und

$$\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \dots, S_n), \quad W = \sup_{n\ge 0} S_n.$$

In dieser Aufgabe werden wir Momenteigenschaften von W zeigen.

(a) Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\mathbb{E}[e^{\lambda X_1}] = e^{\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2}e^{\lambda m}$ (dies ist eine einfache Rechnung, die Sie nicht durchführen müssen). Berechnen Sie $\mathbb{E}[e^{\lambda S_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n]$.

(b) Zeigen Sie, dass ein eindeutiges $\lambda_0 > 0$ existiert, so dass $(e^{\lambda_0 S_n})$ ein Martingal ist.

(c) Zeigen Sie, dass für jedes $a > 1$ gilt

$$P(e^{\lambda_0 W} > a) \le \frac{1}{a}$$

und dass, für $t > 0$ gilt $P(W > t) \le e^{-\lambda_0 t}$.

(d) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[e^{\lambda W}] = 1 + \lambda \int_0^\infty e^{\lambda t} P(W > t)\, dt.$$

Folgern Sie, dass für jedes $\lambda < \lambda_0$ gilt $\mathbb{E}[e^{\lambda W}] < \infty$.

Aufgabe 11.3. (7 Punkte)
Seien $X_1, X_2, \cdots$ unabhängige Zufallsvariablen mit der gleichen stetigen Verteilungsfunktion. Sei

$$E_n := \{X_n > X_m\,,\ \forall m < n\}$$

das Ereignis, dass zur Zeit n ein neuer Rekord auftritt.

(a) Zeigen Sie, dass $E_1, E_2, \dots$ unabhängige Ereignisse sind mit $P(E_n) = \frac{1}{n}$.

(b) Beweisen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1_{E_k} - 1/k}{\log k}$$

fast sicher konvergiert.

(c) Folgern Sie mithilfe von Kroneckers Lemma, dass für die Anzahl N_n der Rekorde bis zur Zeit n gilt

$$\frac{N_n}{\log n} \to 1 \quad \text{fast sicher.}$$