Aufgabe 12.1. (6 Punkte)
Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängig standardnormalverteilte Zufallsvariablen und $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Für $a, b \in \mathbb{R}$ definiere

$$Y_n = \exp(aS_n - bn).$$

(a) Zeigen Sie, dass $Y_n \to 0$ fast sicher genau dann, wenn $b > 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $Y_n \to 0$ in L^p genau dann, wenn $b > \frac{a^2 p}{2}$.

Aufgabe 12.2. (7 Punkte)
Sei (Y_n) eine Folge von u.i.v. Zufallsvariablen, für die gilt $\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}(Y_k = -1) = \frac{1}{2}$. Sei $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ und $S_0 = 0$, $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $n \geq 0$. Definire

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

und den Prozess

$$M_0 = 0, \quad M_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sign}(S_{k-1}) Y_k, \; n = 1, 2, \dots$$

(a) Finden Sie die Doobzerlegung von (S_n^2).

(b) Zeigen Sie, dass (M_n) ein quadratisch integrierbares Martingal ist und berechnen Sie $\langle M \rangle$.

(c) Berechnen Sie die Doobzerlegung von $(|S_n|)$. Zeigen Sie, dass M_n messbar bezüglich $\sigma(|S_1|, \dots, |S_n|)$ ist.

Aufgabe 12.3. (7 Punkte)
Wir zeigen in dieser Aufgabe eine Version von Borel-Cantelli, die auch für nicht unabhängig Zufallsvariablen gilt. Erinnern Sie sich, dass für ein Martingal (M_n) sind die folgende Eigenschaften equivalent:

$$\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}|M_n| < \infty, \quad \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[M_n^+] < \infty, \quad \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[M_n^-] < \infty.$$

Sei (Y_n) eine Folge von positiven, integrierbaren, adaptierten Zufallsvariablen, die möglicherweise abhängig sind.

1. (a) Sei $X_0 = 0$ und $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Zeigen Sie, dass (X_n) ein Submartingal ist und berechnen Sie seine Doobzerlegung $X_n = M_n + A_n$.

   (b) Zeigen Sie, dass für alle $a > 0$ die Zufallsvariable

   $$\tau_a := \inf\{n \geq 0 \colon A_{n+1} > a\}$$

   eine Stoppzeit ist.

Abgabetermin: bis Dienstag 10.07.2018 um 12 Uhr, Raum 304 MI.
Fragen: `pgracar@math.uni-koeln.de`

(c) Sei $M_n = X_n - A_n$. Zeigen Sie, dass $M^-_{n\wedge\tau_a} \le a$ für alle n. Folgern Sie, dass $(M_{n\wedge\tau_a})$ fast sicher konvergiert.

(d) Zeigen Sie, dass $\{\lim_{n\to\infty} A_n < \infty\} \subseteq \{\lim_{n\to\infty} X_n < \infty\}$ fast sicher.
Hinweis: Was passiert auf $\{\tau_a = \infty\}$?

2. Nehmen Sie an, dass $\sup_{n\ge 1} Y_n \in L^1$. Zeigen Sie, dass

$$\{\lim_{n\to\infty} X_n < \infty\} = \{\lim_{n\to\infty} A_n < \infty\} \quad \text{fast sicher.}$$

Hinweis: Definieren Sie die Stoppzeit $\sigma_a = \inf\{n \ge 0 : X_n > a\}$ und betrachten Sie $M^+_{n\wedge\sigma_n}$.

3. Sei (B_n) eine Folge adaptierter Ereignisse. Zeigen Sie, dass

$$\Big\{\sum_{n\ge 1} P(B_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) < \infty\Big\} = \Big\{\sum_{n\ge 1} 1_{B_n} < \infty\Big\} \quad \text{fast sicher.}$$

Fragen: `pgracar@math.uni-koeln.de`