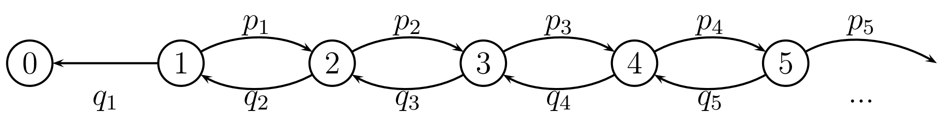
Aufgabe 13.1. (6 Punkte)
Ein Würfel wird präpariert, so dass bei jedem Wurf die Augenzahl nicht gleich der zuvor geworfenen Augenzahl sein kann. Alle anderen Augenzahlen haben Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$. Wenn der erste Wurf eine 6 ergibt, finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der n-te Wurf wieder eine 6 liefert. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass der n-te Wurf eine 1 liefert?

Aufgabe 13.2. (7 Punkte)
Betrachten Sie die Markovkette auf $I = \{0, 1, 2, \dots\}$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten gegeben durch



wobei $0 < p_i = 1 - q_i < 1$ und 0 ein absorbierender Zustand ist. Sei $x_i := \mathbb{P}_i(T_0 < \infty)$ die Eintrittswahrscheinlichkeit bei Start im Zustand i. Setze

$$\gamma_0 := 1, \gamma_i := \frac{q_i q_{i-1} \cdots q_1}{p_i p_{i-1} \cdots p_1} \quad \text{für } i \geq 1.$$

Zeigen Sie, dass

- wenn $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i = \infty$, ist $x_i = 1$ für alle $i \in I$;
- wenn $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i < \infty$, ist $x_i = \dfrac{\sum_{j=i}^{\infty} \gamma_j}{\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j}$ für $i \in I$.

Aufgabe 13.3. ***Ehrenfest-Modell*** (7 Punkte)
Zu Beginn des Experiments befinden sich in zwei Behältern zusammen N Teilchen; etwa die einzelnen Moleküle des Stoffes, wovon sich $l_0 \leq N$ im linken und $N - l_0 \leq N$ im rechten Behälter aufhalten. In jedem Zeitschritt wird nun genau eines dieser N Teilchen gleichverteilt ausgewählt, das den Behälter wechselt.

Die Anzahl der Teilchen im linken Behälter bildet daher eine Markovkette $(l_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Werten in $\{0, 1, 2, \dots N\}$ und Übergangsmatrix $P = (p_{i,j})$, gegeben durch

$$p_{i,j} = \begin{cases} \frac{i}{N}, & \text{falls } j = i - 1\,, \\ \frac{N-i}{N}, & \text{falls } j = i + 1\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Finden Sie die invariante Verteilung.

(b) Prüfen Sie, ob diese Markovkette reversibel ist.

(c) Sei $T = \min\{n \geq 0 \colon l_n = 0\}$ die erste Zeit sodass alle Teilchen im rechten Behälter sind. Sei $x_i := \mathbb{E}_i[T]$ der Erwartungswert von T, gegeben dass am Anfang genau i Teilchen im linker Behälter sind. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für $x_1, x_2, \dots, x_N$ auf.

Abgabetermin: bis Dienstag 17.07.2018 um 12 Uhr, Raum 304 MI.
Fragen: `pgracar@math.uni-koeln.de`