Prof. Dr. Alexander Lytchak

WS 2018/19
Blatt 1
12.10.2018

Analysis III

Abgabe: Keine Abgabe. Die Aufgaben werden in der ersten Übung besprochen und sind klausurrelevant.

1. Sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Es sei

$$\mathcal{A} = \{U \subset \mathbb{N} \mid U \text{ ist endlich}\} \cup \{U \subset \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \backslash U \text{ ist endlich}\}.$$

   Definiert $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf $\mathbb{N}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Ist die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ln(x_1^2 + 1) < \sin(x_2),\ x_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ (x_2 - \pi) \in \mathbb{Q}\}$$

   eine Borelmenge? Erklären Sie Ihre Antwort.

3. Sei $X = \{1, \ldots, n\}$ eine endliche Menge und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X. Sei $f : X \to X$ eine Abbildung und $f(\mathcal{A})$ definiert durch

$$f(\mathcal{A}) := \{f(A) : A \in \mathcal{P}(X)\}.$$

   Zeigen Sie, dass $f(\mathcal{A})$ eine σ-Algebra auf X ist, genau dann wenn f bijektiv ist.