Prof. Dr. Alexander Lytchak

WS 2018/19
Blatt 10

Analysis III

Abgabe: 10. bis 13. Dezember in den Übungen

Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ wird mit λ_n bezeichnet.

34. (4 Punkte) Berechnen Sie das Integral
$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-||x||^2} d\lambda_n.$$

35. (4 Punkte) Sei α eine reelle Zahl. Wir definieren eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = ||x||^\alpha$.

    Für welche α ist f Lebesgue-integrierbar auf $B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$? Für welche α auf $\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)$? Begründen Sie Ihre Antwort und berechnen Sie die Integrale
$$\int_{B_1(0)} f \, d\lambda_n \ , \ \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} f \, d\lambda_n,$$
    wenn f integrierbar ist.

36. (4 Punkte) Betrachten Sie die folgende Abbildung
$$\begin{aligned} \varphi : [0,1] \times [0,1] &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (y, x^2 y + x)\,. \end{aligned}$$
    Berechnen Sie das Lebesgue-Maß des Bildes $\varphi([0,1] \times [0,1])$ von $[0,1] \times [0,1]$ unter φ.

37. (0 Punkte) Betrachten Sie die folgende Abbildung
$$\begin{aligned} \phi : [0,1] \times [0,1] \times [0,1] &\to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\mapsto (y + z + y^2, x + y^3, -y + z + y^2)\,. \end{aligned}$$
    Berechnen Sie das Lebesgue-Maß des Bildes $\phi([0,1] \times [0,1] \times [0,1])$ von $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ unter ϕ.

38. (0 Punkte)

    a) Sei $B_1(0) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ die Einheitsscheibe in der Ebene. Berechnen Sie das Integral
$$\int_{B_1(0) \times [0,1]} (x+y)^2 z^2 \, d\lambda_3 \ .$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{[0,1]\times[0,1]\times[0,1]} x(x+y)(x+y+z)\,d\lambda_3\ .$$