Prof. Dr. Alexander Lytchak

WS 2018/19
Blatt 11

Analysis III

Abgabe: 17. bis 20. Dezember in den Übungen

Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ wird mit λ_n und das Hausdorff-Maß mit $\mathcal{H}^s$ bezeichnet.

39. (4 Punkte) Berechnen Sie die Oberfläche des Paraboloids

$$P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 \ , \ x^2 + y^2 \leq 1\} .$$

40. (4 Punkte) Sei $s \geq 0$ eine reelle Zahl. Definieren Sie Z_s durch

$$Z_s := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |z| \leq s\} .$$

a) Sei $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$. Finden Sie s, sodass das Hausdorff-Mass $\mathcal{H}^2(S^2 \cap Z_s)$ gleich $\frac{1}{2}\mathcal{H}^2(S^2) = 2\pi$ ist.

b) Sei $B_1(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ die Einheitskugel in $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie das Lebesgue-Maß $\lambda_3(B_1(0) \cap Z_s)$ in Abhängigkeit von s. Halbiert der Wert von s aus Teil a) auch das Volumen?

41. (4 Punkte) Seien $S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ der Einheitskreis in der Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ und $p = (x_0, y_0, 1)$ ein Punkt in $\mathbb{R}^3$. Wir definieren durch

$$K(S, p) := \{(1 - t)\xi + tp \in \mathbb{R}^3 \mid \xi \in S \, , \, 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

den Kegel mit Basis S und Spitze p.

Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{H}^2(K(S, p)) \to \infty \text{ für } r_0 = x_0^2 + y_0^2 \to \infty$$

gilt. *Hinweis:* Betrachten Sie die Projektion des Kegel $K(S, p)$ auf die Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$.

42. (0 Punkte) Wir betrachten die folgenden drei Körper:

a) Die Halbkugel vom Radius $r > 0$

$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, z \geq 0\}.$$

b) Den Kegel der Höhe r, dessen Basis ein Kreis mit Radius r ist

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2, \ 0 \leq z \leq r\}.$$

c) Den Zylinder mit Radius r und Höhe r

$$Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq r^2,\ 0 \leq z \leq r\}.$$

Beweisen Sie, dass

$$\lambda_3(H) = \lambda_3(Z \setminus C)$$

gilt. In welcher Beziehung steht diese Gleichheit zum Cavalierischen Prinzip?

43. (0 Punkte) Sei $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ eine injektive C^1-Abbildung definiert auf einer offenen Teilmenge U von $\mathbb{R}^n$. Seien M das Bild $\varphi(U)$ von U unter φ und $I = (a, b)$ ein offenes Intervall. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{H}^{n+1}(M \times I) = \mathcal{H}^n(M)(b - a)$$

gilt.