Prof. Dr. Alexander Lytchak WS 2018/19

Blatt 12

Analysis III

Abgabe: 7. bis 10. Januar in den Übungen.

Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ wird mit λ_n, das s-dimensionale äußere Hausdorff-Maß auf $\mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{H}^s$ und das Ball in $\mathbb{R}^n$ mit Zentrum $p \in \mathbb{R}^n$ und Radius $r > 0$ mit $B_r(p)$ bezeichnet.

44. a) (0 Punkte) Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A, B \in \mathcal{A}$ mit $0 < \mu(A) < \infty$. Wie lautet der Wert des Integrals

$$\fint_A \chi_B \, d\mu$$

in Termen von μ.

b) Wir definieren $A, B \subset \mathbb{R}^2$ durch

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$$
$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Berechnen Sie die Integrale

$$\fint_A \chi_B \, d\lambda_2 \ , \ \fint_B \chi_A \, d\lambda_2 \, .$$

45. Sind $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und A_f die Menge der Punkte

$$A_f := \{(r, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b, \, 0 \leq r \leq f(z)\},$$

so ist

$$R_f := \{(r\cos(\phi), r\sin(\phi), z) \mid (r, 0, z) \in A_f\}$$

der durch A_f um die Rotation um die z-Achse definierte Rotationskörper mit Rand ∂R_f. Berechnen Sie das Lebesgue-Maß $\lambda_3(R_f)$ und das Hausdorff Maß $\mathcal{H}^2(\partial R_f)$ für die folgenden Abbildungen:

a) (4 Punkte) $f : [0, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto x$.

b) (0 Punkte) $f : [1, 2] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[3]{x}$.

46. a) (2 Punkte) Seien $K \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränke Borelmenge von positiven Lebesgue Maß und $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine affine Abbildung. Beweisen Sie, dass L den Schwerpunkt von K auf den Schwerpunkt von $L(K)$ abbildet.

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt eines Dreiecks in $\mathbb{R}^2$ der Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden ist.

47. (0 Punkte) Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) := x^2 - y^2 \,.$$

Zeigen Sie, dass für alle $p \in \mathbb{R}^2$

$$⨍_{B_r(p)} f \, d\lambda_2 = f(p)$$

gilt.

Hinweis: Beweisen Sie zuerst, dass

$$⨍_{B_r(\mathbf{0})} f \, d\lambda_2 = f(\mathbf{0}) = 0$$

gilt.

48. (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass für jedes $p \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\lim_{r \to 0} ⨍_{B_r(p)} f \, d\lambda_n = f(p) \,.$$