Prof. Dr. Alexander Lytchak

WS 2018/19
Blatt 13

Analysis III

Abgabe: 14. Januar bis 17. Januar in den Übungen

Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ wird mit λ_n und das s-dimensionale äußere Hausdorff-Maß auf $\mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{H}^s$ bezeichnet.

49. Erinnern Sie sich daran, dass eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^k$ eine *n-dimensionale $\mathcal{C}^l$-Untermannigfaltikeit von $\mathbb{R}^k$* heißt, falls sie die folgenden äquivalenten Aussagen erfüllt:

    Aussage 1 *Für alle $x \in X$ existiert eine Umgebung U von x in $\mathbb{R}^k$ und ein $\mathcal{C}^l$-Diffeomorphismus $\Phi_1 : U \to V \subset \mathbb{R}^k$, so dass $\Phi_1(X \cap U)$ gleich dem Durchschnitt von V mit einem affinen n-dimensionalen Teilraum ist.*

    Aussage 2 *Für alle $x \in X$ existiert eine Umgebung U von x in $\mathbb{R}^k$, eine offene Menge V in $\mathbb{R}^n$ und eine injektive $\mathcal{C}^l$-Immersion $\Phi_2 : V \to U$, so dass $\Phi_2(V) = U \cap X$ gilt.*

    Aussage 3 *Für alle $x \in X$ existiert eine Umgebung U von x in $\mathbb{R}^k$, eine Submersion $\Phi_3 : U \to \mathbb{R}^{k-n}$ und ein $y \in \mathbb{R}^{k-n}$, so dass $U \cap X = \Phi_3^{-1}(y)$ gilt.*

    a) (2 Punkte) Sei $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\}$. Weisen Sie für die Menge $X \setminus \{\mathbf{0}\}$ jede der drei Bedingungen (***Aussage 1*** bis ***3***), die eine 1-dimensionale $\mathcal{C}^1$-Untermannigfaltikeit von $\mathbb{R}^2$ definieren, einzeln nach.

    b) (2 Punkte) Warum ist X keine $\mathcal{C}^1$-Untermannigfaltigkeit? Begründen Sie Ihre Antwort.

50. (4 Punkte) Sei
$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$
die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass S^2 ***Aussage 2*** und ***Aussage 3*** erfüllt, die eine 2-dimensionale $\mathcal{C}^1$-Untermannigfaltikeit von $\mathbb{R}^3$ definieren.

51. Sei I ein Segment im $\mathbb{R}^3$ der Länge $a > 0$. Für $t > 0$ sei X_t bzw. Y_t die Menge der Punkte $x \in \mathbb{R}^2$ mit $d(x, I) = \inf\{d(x, y) | y \in I\} = t$ bzw. $\leq t$.

    a) (2 Punkte) Bestimmen Sie $\lambda_3(Y_t)$ in Abhängigkeit von t.

    b) (2 Punkte) Bestimmen Sie $\mathcal{H}^2(X_t)$ in Abhängigkeit von t.

c) (+2 Extrapunkte, nicht klausurrelevant). Beweisen Sie, dass X_t für jedes t eine $\mathcal{C}^1$-Untermannigfaltigkeit ist.

d) (+2 Extrapunkte, nicht klausurrelevant). Warum ist X_t keine $\mathcal{C}^2$-Untermannigfaltigkeit?

Hinweis: Beschreiben Sie zunächst im Bild wie X_t und Y_t ausssehen und beweisen Sie, dass die geometrische Anschauung korrekt ist.

52. Seien $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ und $P_1 = (1, 1), P_2 = (-1, 1), P_3 = (-1, -1), P_4 = (1, -1)$ die Ecken von X.

a) (2 Punkte) Beweisen Sie, dass $X \setminus \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ eine 1-dimensionale $\mathcal{C}^1$-Untermannigfaltikeit von $\mathbb{R}^2$ ist.

b) (0 Punkte) Beweisen Sie, dass X keine $\mathcal{C}^1$-Untermannigfaltikeit ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\gamma'(0)$ für jedes $\mathcal{C}^1$-Kurve $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to X$ mit $\gamma(0) = P_i$ gleich $\mathbf{0}$ ist. (Alternativ könnte man mit Tangentialräumen argumentieren, die in der Woche nach den Ferien in der Vorlesung behandelt werden.)