Analysis III

Abgabe: 21. bis 24. Januar in den Übungen.

Dies ist das letzte zulassungsrelevante Übungsblatt. Es wird noch zwei weitere klausurrelevante Übungsblätter geben.

53. (0 Punkte) Seien $R > s > 0$ und $T_{R,s} \subset \mathbb{R}^3$ der Rotationstorus der durch Rotation um die z-Achse des Kreises
$$B = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - R)^2 + z^2 \leq s^2\}$$
mit Radius s in der xz Ebene. Beweisen Sie, dass $T_{R,s}$ eine 3-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ mit Rand ist.

54. Sei $\partial T_{R,s}$ der Rand von $T_{R,s}$.
    a) (3 Punkte) Geben Sie einen Atlas für $\partial T_{R,s}$ an.
    b) (3 Punkte) Finden Sie eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^3$ von $\partial T_{R,s}$ und eine C^1-Abbildung $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sodass für alles $x \in \partial T_{R,s}$
    $$Df(x) \neq 0$$
    und $f^{-1}(0) = \partial T_{R,s}$ gilt.
    c) (3 Punkte) Finden Sie eine Basis für den Tangentialraum von $\partial T_{R,s}$ in $\frac{\sqrt{2}}{2}(R + s, R + s, 0)$.

55. (0 Punkte) Sei $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, dass X keine C^1-Untermannigfaltikeit mit Rand ist.

56. a) (3 Punkte) Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine C^1-Untermannigfaltikeit von $\mathbb{R}^k$, $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ eine C^1-Abbildung und $x \in M$ ein lokaler Extrempunkt von $F|_M : M \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das Differential
    $$DF(x) : T_xM \to \mathbb{R}$$
    von F im Punkt x gleich Null ist.
    b) (0 Punkte) Seien A eine reelle $n \times m$ Matrix und $S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ die Einheitssphäre. Wir definieren eine Abbildung $F : S^{m-1} \to \mathbb{R}$ durch
    $$F(x) := \|A(x)\|^2 .$$
    Beweisen Sie, dass das Differential
    $$DF(x) : T_xS^{m-1} \to \mathbb{R}$$
    von F im Punkt $x \in S^{m-1}$ gleich Null ist genau dann, wenn x ein Eigenvektor der Matrix A^TA ist.