Prof. Dr. Alexander Lytchak WS 2018/19
Blatt 15

Analysis III

Keine Abgabe. Die Aufgaben sind klausurrelevant.

Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ wird mit λ_n und das s-dimensionale äußere Hausdorff-Maß auf $\mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{H}^s$ bezeichnet.

1. Seien U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^k$, $f : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ eine C^1-Abbildung und $\mathbf{v}$ ein Vektorfeld auf U. Beweisen Sie, dass die folgende Gleichung

$$\operatorname{div}(f\mathbf{v}) = f \operatorname{div}(\mathbf{v}) + \langle \nabla f, \mathbf{v} \rangle$$

gilt.

2. Seien $a, b > 0$ und sei M die Ellipse definiert durch

$$M := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

a) Beweisen Sie, dass M eine C^1-Untermannigfaltikeit mit Rand

$$\partial M := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

von $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Geben Sie eine Parametrisierung für ∂M an und berechnen Sie den äußere Normaleneinheitsvektor auf ∂M.

c) Seien $\mathbf{n}$ der äußere Normaleneinheitsvektor auf ∂M und $\mathbf{v}$ das Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\mathbf{v}(x, y) = (x, y).$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial M} \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle d\mathcal{H}^1$$

und überprüfen Sie, dass es dem Lebesgue-Maß der Ellipse M entspricht.

3. Sei $s > 0$ eine reelle Zahl und sei $\mathbf{v}$ das Vektorfeld auf $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ definiert durch

$$\mathbf{v}(x) = \frac{x}{\|x\|^s}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$ gilt genau dann, wenn $k = s$.

b) Finden Sie reelle Zahlen a und l, sodass

$$\mathbf{v}(x) = \nabla\Big(\frac{a}{\|x\|^l}\Big)$$

c) Nehmen Sie an, dass $k = s = 3$. Seien $B_r(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^3$ der Ball mit Zentrum $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ und Radius $r > 0$ und $\mathbf{n}$ der äußere Normaleneinheitsvektor auf $\partial B_r(\mathbf{0})$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial B_r(\mathbf{0})} \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle d\mathcal{H}^2 .$$

Warum widerspricht das Ergebnis nicht dem Satz von Gauß? Warum folgt aus dem Satz von Gauß, dass das Integral nicht von r abhängt? Begründen Sie Ihre Antworten.