Prof. Dr. Alexander Lytchak

WS 2018/19
Blatt 2
12.10.2018

Analysis III

Abgabe: Vom 20.10 bis zum 25.10 in den Übungen.

4. Sei X eine Menge und seien A und B zwei Teilmengen von X. Definieren Sie $\mathcal{E}$ durch
$$\mathcal{E} := \{A, B\} \in \mathcal{P}(X).$$
Sei $\sigma(\mathcal{E})$ die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra.

   a) (2 Punkte) Beschreiben Sie $\sigma(\mathcal{E})$.

   b) (2 Punkte) Wie viele Elemente kann $\sigma(\mathcal{E})$ höchstens enthalten? Geben Sie Beispiele für X, A und B, sodass $\sigma(\mathcal{E})$ weniger Elemente als die maximale Anzahl enthält.

5. (4 Punkte) Sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X und $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$. Sei
$$\big\{f_n : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})\big\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$$
eine Folge meßbarer Funktionen, sodass ein $C > 0$ existiert mit
$$|f_n(x)| < C$$
für alle $n \in \mathbb{Z}_+, x \in X$. Zeigen Sie, dass
$$\begin{aligned} f : (X, \mathcal{A}) &\to (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \\ x &\mapsto \limsup_{n \to \infty} f_n(x) \end{aligned}$$
meßbar ist.

6. (4 Punkte) Sei Ω eine Menge und $\mathcal{E}$ eine σ-Algebra auf Ω. Für eine Teilmenge C von Ω definieren wir die *Spur* von $\mathcal{E}$ in C durch
$$\mathcal{E}_C := \{E \cap C : E \in \mathcal{E}\}.$$
Zeigen Sie, dass $\mathcal{E}_C$ eine σ-Algebra ist und, dass im Fall $C \in \mathcal{E}$ gilt:
$$\mathcal{E}_C = \{E \in \mathcal{E} : E \subset C\}.$$