Analysis III

Abgabe: Keine Abgabe. Die Aufgaben werden in der zweiten Übung besprochen und sind klausurrelevant.

7. Sei $(X, \mathcal{A}, \lambda)$ ein Maßraum.

   a) Sei C eine Teilmenge von X und
   $$\mathcal{A}_C := \{E \cap C \mid E \in \mathcal{A}\}$$
   die *Spur* von $\mathcal{A}$ in C. Wir definieren eine Abbildung $\lambda_C : \mathcal{A}_C \to [0, \infty]$ durch
   $$\lambda_C(E \cap C) := \inf\Big\{\lambda(U) \mid U \in \mathcal{A}\,,\ E \cap C \subset U\Big\}.$$
   Ist $(C, \mathcal{A}_C, \lambda_C)$ ein Maßraum? Begründen Sie Ihre Antwort.

   b) Sei B eine Menge, die X enhält. Wir bezeichnen mit $\mathcal{A}^B \subset \mathcal{P}(B)$ die kleinste σ-Algebra auf B, die $\mathcal{A}$ enthält.

   - Beweisen Sie, dass die Abbildung
     $$\lambda^B : \mathcal{A}^B \to [0, \infty]$$
     definiert durch
     $$\lambda^B(E) = \sup\Big\{\lambda(U) \mid U \in \mathcal{A}\,,\ U \subset E\Big\}$$
     ein Maß ist.
   - Zeigen Sie, dass $(\mathcal{A}^B)_X = \mathcal{A}$ und $(\lambda^B)_X = \lambda\,.$
   - Geben Sie ein Beispiel für $(X, \mathcal{A}, \lambda)$ und $C \subset X$, sodass
     $$(\mathcal{A}_C)^X \neq \mathcal{A}$$
     gilt.

8. Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht Lebesgue-messbare Menge. Warum gibt es keine kleinste Lebesgue-messbare Menge, die E enhält? Warum ist die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^n$
   $$\bigcap\{F \supseteq E \mid F \subset \mathbb{R}^n \text{ Lebesgue-messbar}\}$$
   nicht Lebesgue-messbar?

9. Wir bezeichnen mit λ das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass es für jede Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ eine Borelmenge F gibt mit
   $$\lambda(F) = \lambda(E)$$
   und $E \subset F$.