Prof. Dr. Alexander Lytchak

WS 2018/19
Blatt 4

Analysis III

Abgabe: 29.10 bis 30.10 in den Übungen, bzw. am 29.10 nach der Vorlesung, falls Ihre Übung donnerstags stattfindet, da der 1.11 ist ein Feiertag ist. In diesem Fall besuchen Sie bitte in dieser Woche die Übung am Montag oder Dienstag.

10. (4 Punkte) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X und $\lambda : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Maß auf X. Wir definieren eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ durch

$$\mu(E) := \inf\Big\{\lambda(U) \mid U \in \mathcal{A}\,,\, E \subset U\Big\}$$

Zeigen Sie:

a) μ ist ein äußeres Maß auf X.

b) Für jede Menge $E \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu(E) = \lambda(E)\,.$$

c) Für jede Menge $E \in \mathcal{P}(X)$ gibt es eine Menge $U \in \mathcal{A}$, sodass

$$\mu(E) = \lambda(U)\,.$$

und $E \subset U$ gilt.

11. (4 Punkte) Sei X eine Menge und seien A und B zwei nicht leere echte Teilmengen von X deren Vereinigung ebenfalls eine echte Teilmenge von X ist. Definieren Sie $\mathcal{E}$ durch

$$\mathcal{E} := \{A, B\} \in \mathcal{P}(X).$$

Sei $\sigma(\mathcal{E})$ die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra und $\lambda : \mathcal{E} \to (0, \infty)$ eine Abbildung.

Beweisen Sie, dass zwei verschiedene Maße $\mu, \mu' : \sigma(\mathcal{E}) \to [0, \infty]$ existieren mit

$$\mu'|_{\mathcal{E}} = \mu|_{\mathcal{E}} = \lambda.$$

12. (4 Punkte) Wir bezeichnet mit λ das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass es für jede Lebesgue-messbare Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ Borelmengen $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$B_1 \subset E \subset B_2$$

und $\lambda(B_2 \setminus B_1) = 0\,.$