Prof. Dr. Alexander Lytchak

WS 2018/19
Blatt 5

Analysis III

Abgabe: 5.11 bis 8.11 in den Übungen.

Hinweis: Alle Aufgabe sind Klausurrelevant, aber nur Aufgabe 13 bis 15 sind relevant für die Zulassung.

Die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ wird mit $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und das Lebesgue-Maß auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ wird mit λ_n bezeichnet.

13. (4 Punkte) Zeigen Sie:

    a) Für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\lambda_n(K) < \infty$.

    b) Für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\lambda_n(U) > 0$.

14. (4 Punkte) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Seien $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) < \infty.$$

Zeigen Sie, dass

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big)$$

genau dann, wenn für alle $i \neq j : \mu(E_i \cap E_j) = 0$ gilt.

15. (4 Punkte) Sei $W := (0,1) \times \ldots \times (0,1) \subset \mathbb{R}^n$ der offene Einheitswürfel. Zeigen Sie:

    a) Für alle $\epsilon \in (0,1)$ gibt es eine kompakte Menge $K_\epsilon \subset W$ ohne innere Punkte, sodass gilt:

$$\lambda_n(K_\epsilon) > 1 - \epsilon\,.$$

    b) Es gibt keine kompakte Menge $K \subset W$ mit

$$\lambda_n(K) = \lambda_n(W) = 1\,.$$

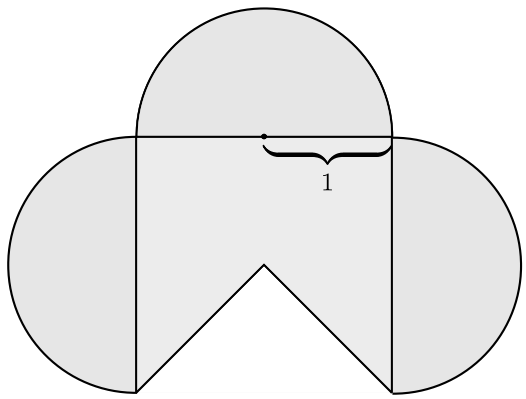
16. (0 Punkte) Sei $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß und sei $\mathcal{M}_\mu$ die Menge der μ-messbaren Mengen. Nehmen Sie an, dass für jede Borelmenge B gilt:

$$\mu(B) = \lambda_n(B) \quad \text{und} \quad B \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{R}^n).$$

Beweisen Sie

$$\mathcal{M}_\mu(\mathbb{R}^n) \supseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\,.$$

17. (0 Punkte) Berechnen Sie das Lebesgue-Maß der folgenden Figur:



Argumentieren Sie geometrisch mit den Eigenschaften des Lebesgue-Maßes und der Tatsachen, dass der Flächeninhalt eines Einheitskreises π ist und der Flächeninhalt eines Einheitsquadrats 1 ist.

18. (0 Punkte) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Der Graph von f ist definiert durch

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I\} \subset \mathbb{R}^2\,.$$

Beweisen Sie, dass $\Gamma_f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ und $\lambda_2(\Gamma_f) = 0\,.$

Hinweis: Beweisen Sie die Aufgabe zuerst für kompakte Intervalle und benutzen Sie, dass eine stetige Abbildung auf ein kompaktes Intervall gleichmäßig stetig ist. Überdecken Sie anschließend das Intervall mit kompakten Intervallen.