Prof. Dr. Alexander Lytchak

WS 2018/19
Blatt 6

Analysis III

Abgabe: 12. bis 15. November in den Übungen

Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ wird mit λ_n und das s-dimensionale äussere Hausdorff-Maß auf $\mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{H}^s$ bezeichnet.

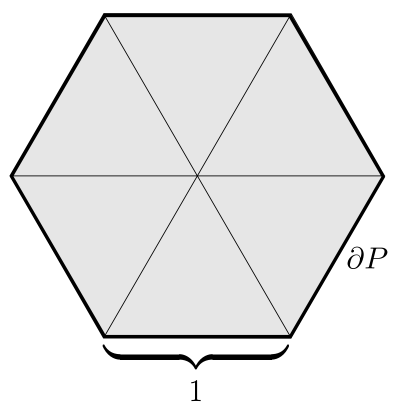
19. (4 Punkte) Berechnen Sie das Lebesgue-Maß der folgenden Ellipse:

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + xy - x - y \leq 1\}$$

Finden Sie eine affine Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sodass gilt

$$F\big(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}\big) = E\,.$$

20. Betrachten Sie das folgende Sechseck P mit Rand ∂P:



Berechnen Sie das Lebesgue-Maß $\lambda_2(P)$ und das Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^1(\partial P)$.

Hinweis: Benutzen Sie die Eigenschaften des Hausdorff-Maßes.

21. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres Simplex mit Rand ∂S und mit Kantenlänge 1. Berechnen Sie:

- (2 Punkte) die Winkel zwischen zwei verschiedenen Kanten,
- (2 Punkte) das Lebesgue-Maß $\lambda_3(S)$,
- das Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^2(\partial S)$.

22. (4 Punkte) Beweisen Sie, dass es für jedes $s \in (0, n)$ keine abzählbare Überdeckung $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ des $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

gibt mit $\mathcal{H}^s(E_i) < \infty$.

Hinweis: Benutzen Sie die Eigenschaften des Hausdorff-Maßes.