Prof. Dr. Alexander Lytchak

WS 2018/19
Blatt 7

Analysis III

Abgabe: 19.11 bis 22.11 in den Übungen.

Das s-dimensionale äußere Hausdorff-Maß auf $\mathbb{R}^n$ wird mit $\mathcal{H}^s$ und die Hausdorff-Dimension mit $\dim_{\mathcal{H}}$ bezeichnet.

1. a) (2 Punkte) Seien A und B zwei Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, sodass

$$A \subset B \subset \mathbb{R}^n$$

gilt. Beweisen Sie, dass

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) \leq \dim_{\mathcal{H}}(B)$$

gilt.

b) (2 Punkte) Seien $B_1, B_2, \ldots$ Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Zeigen Sie, dass

$$\dim_{\mathcal{H}}(B) = \sup_i \dim_{\mathcal{H}}(B_i)$$

gilt.

2. (4 Punkte) Sei $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Seien I_1 die Strecke zwischen $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_3$, I_2 die Strecke zwischen $\mathbf{0}$ und $\mathbf{e}_3$, I_3 die Strecke zwischen $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$ und sei T das Dreieck mit Ecken $\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.

Wir definieren $E \subset \mathbb{R}^3$ durch

$$E := I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup T\,.$$

Berechnen Sie das Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^2(E)$ und folgern Sie daraus, dass

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) = 2$$

gilt.

3. Sei $s \geq 0$ eine reelle Zahl und E eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

a) (2 Punkte) Nehmen Sie an, dass es für jedes $x \in E$ eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt, die x enthält und, die

$$\mathcal{H}^s(E \cap U) = 0$$

erfüllt. Beweisen Sie

$$\mathcal{H}^s(E) = 0\,.$$

b) (2 Punkte) Nehmen Sie an, dass es für jedes $x \in E$ eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt, die x enthält und, die

$$\dim_{\mathcal{H}}(E \cap U) \leq s$$

erfüllt. Beweisen Sie

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) \leq s\,.$$

4. (0 Punkte) Sei E eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : E \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz Abbildung. Zeigen Sie

$$\dim_{\mathcal{H}}(f(E)) \leq \dim_{\mathcal{H}}(E)\,.$$

Allgemeiner Hinweis: Benutzen Sie in jeder Aufgabe die Eigenschaften des Hausdorff-Maßes.