Prof. Dr. Alexander Lytchak

WS 2018/19
Blatt 8

Analysis III

Abgabe: 26.11. bis 29.11. in den Übungen.

Das Lebesgue-Maß, auf $\mathbb{R}$ wird mit λ bezeichnet.

27. (4 Punkte) Sei δ_0 das Dirac-Mass auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$\delta_0(E) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in E \\ 0 & \text{sonnst} \end{cases} .$$

Zeigen Sie, dass jede Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δ_0-integrierbar ist und berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_0 \ .$$

28. Für ein Maß μ auf $(X, \mathcal{A})$ und eine meßbare Funktion $g : X \to \mathbb{R}, g \geq 0$, definieren wir $\mu_g : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ durch

$$\mu_g(E) := \int_E g \, d\mu$$

für $E \in \mathcal{A}$.

a) (2 Punkte) Beweisen Sie, dass μ_g ein Maß auf $\mathcal{A}$ ist.

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\mu(E) = 0$, schon $\mu_g(E) = 0$ impliziert.

c) Nehmen Sie an, dass $X = \mathbb{R}$ und

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ 1/x & \text{sonst} \end{cases} .$$

gilt. Geben Sie Beispiele für $E, F \subset \mathbb{R}$, sodass

i. $\mu_g(E) < \infty$ und $\lambda(E) = \infty$,

ii. $\mu_g(F) = \infty$ und $\lambda(F) < \infty$

gilt.

29. (4 Punkte) Seien $E = [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ und $f(x) = \sin(x)$. Berechnen Sie

$$\int_E f \, d\lambda \, .$$

Begründen Sie Ihre Antwort.