Prof. Dr. Alexander Lytchak WS 2018/19

Blatt 9

Analysis III

Abgabe: 3.12 bis 6.12 in den Übungen

Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ wird mit λ_n und das s-dimensionale äußere Hausdorff-Maß, auf $\mathbb{R}^n$ wird mit $\mathcal{H}^s$ bezeichnet.

30. Seien A eine Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ und B eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie:

    a) (2 Punkte) Falls A eine Lebesgue-Nullmenge von $\mathbb{R}^m$ ist, so ist $A \times B$ eine Lebesgue-Nullmenge von $\mathbb{R}^{m+n}$. Sie dürfen die Satze von Fubini, Tonelli und Cavalieri nicht benutzen.

    b) (0 Punkte) Falls A und B Borel-Mengen sind, so ist auch $A \times B$ eine Borel-Menge.

    c) (2 Punkte) Falls A und B Lebesgue-messbaren Mengen sind, so ist auch $A \times B$ eine Lebesgue-messbare Menge.

31. (4 Punkte) Beweisen Sie durch vollständige Induktion mit der Formel des Volumens eines Kegels, dass das Volumen des Standard-Simplex $\triangle^n \subset \mathbb{R}^n$ mit Ecken $\mathbf{0}, \mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n} \in \mathbb{R}^n$ gleich $\dfrac{1}{n!}$ ist.

32. (0 Punkte) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum. Erinnern Sie sich daran, dass $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *vollständig* ist, wenn für jede Menge $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ auch alle Teilmenge $A \subset N$ in $\mathcal{A}$ liegen.

    Sei $g : X \to [0, \infty)$ eine Abbildung. Nehmen Sie an, dass es für jedes $\epsilon > 0$ eine messbare Abbildung $g_\epsilon : X \to [0, \infty)$ gibt, sodass gilt:

    $$g_\epsilon(x) \geq g(x) \text{ für alle } x \in X \text{ und } \int_X g_\epsilon \, d\mu \leq \epsilon\,.$$

    Zeigen Sie, dass $g = 0$ fast überall gilt und insbesondere g messbar ist.

33. a) (2 Punkte) Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine μ-integrierbaren Abbildung. Sei $A = X \setminus f^{-1}(0)$. Zeigen Sie, dass es eine abzählbare Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen aus $\mathcal{A}$ gibt, sodass

    $$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

    und

    $$\mu(A_n) < \infty$$

    für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

b) (2 Punkte) Sei $s \geq 0$ eine reelle Zahl und $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ eine Borel-messbare Abbildung. Nehmen Sie an, dass

$$0 < \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mathcal{H}^s < \infty$$

gilt. Zeigen Sie, dass s die Hausdorff-Dimension von $\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(0)$ ist.