STETIGKEIT VON POTENZREIHEN

Sei $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Also definiert P eine Funktion $P : (-R, R) \to \mathbb{R}$. Wir möchten die Stetigkeit von P auf dem ganzen Interval $(-R, R)$ beweisen.

Wir brauchen zwei Lemmata. Das erste Lemma kann man auch aus der Formel für die Bestimmung des Konvergenzradius herleiten.

Lemma 0.1. *Die Potenzreihe $Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ hat Konvergenzradius $R_0 = R$.*

Beweis. Für alle x gilt $|n \cdot a_n \cdot x^n| \geq |a_n| \cdot |x|^n$.

Konvergiert für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ die Reihe $Q(x_0)$ absolut, dann konvergiert auch $\Sigma_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x_0^n = x_0 \cdot Q(x_0)$ absolut, also folgt aus dem Majorantenkriterium die absolute Konvergenz von $P(x_0)$.

Sei andererseits $P(x_0)$ absolut konvergent und $0 < \lambda < 1$ beliebig. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|n \cdot \lambda^n| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Für solche n gilt dann $|n \cdot a_n \cdot (\lambda \cdot x_0)^n| \leq |a_n \cdot x_0^n|$.

Nach dem Majorantenkriterium konvergiert also $\Sigma_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (\lambda \cdot x_0)^n$ absolut. Für $x_0 \neq 0$ können wir durch $\lambda \cdot x_0$ dividieren und erhalten wir die absolute Konvergenz von $Q(\lambda \cdot x_0)$.

Aus dem ersten Argument erhalten wir $R_0 \leq R$. Aus dem zweiten Argument folgt für alle $0 < \lambda < 1$, dass $\lambda \cdot R \leq R_0$. Zusammen ergibt es $R = R_0$. □

Das nächste Lemma ist die entscheidende Abschätzung. Die Abschätzung ist etwas genauer formuliert als für die Stetigkeit benötigt, wir werden es aber später nochmal in der Differentialrechnung brauchen.

Lemma 0.2. *Seien Potenzreihen P und Q mit Konvergenzradius R wie oben. Sei x_0 eine Zahl mit $|x_0| < R$ und sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ die Ungleichung*

$$|P(x) - P(x_0) - (x - x_0) \cdot Q(x_0)| < \epsilon \cdot |x - x_0| \tag{0.1}$$

gilt.

Beweis. Wähle $s \in \mathbb{R}$ mit $|x_0| < s < R$. Sei $0 < \delta_0 < s - |x_0|$. Dann konvergiert für alle x mit $|x - x_0| < \delta_0$ die Reihe $P(x)$. Mit dem obigen Lemma finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{n=n_0}^{\infty} |n \cdot a_n \cdot s^{n-1}| < \epsilon/4$.

Also gilt für alle x mit $|x - x_0| < \delta_0$,

$$|P(x){-}P(x_0)| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n{\cdot}(x^n{-}x_0^n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n{\cdot}(x{-}x_0){\cdot}(x^{n-1}{+}x^{n-2}{\cdot}x_0{+}...{+}x_0^{n-1})\,.$$

Daraus folgt

$$|P(x){-}P(x_0){-}(x{-}x_0){\cdot}R(x_0)| = |x{-}x_0|{\cdot}\sum_{n=1}^{\infty} a_n{\cdot}((x^{n-1}{+}x^{n-2}{\cdot}x_0{+}...{+}x_0^{n-1}){-}n{\cdot}x_0^{n-1})$$

Wir schätzen die letzten Summanden durch die Reihe $Q(s)$ ab:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n{\cdot}((x^{n-1}{+}x^{n-2}{\cdot}x_0{+}...{+}x_0^{n-1}){-}n{\cdot}x_0^{n-1}) \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} 2{\cdot}n{\cdot}|a_n||s|^{n-1} < 2{\cdot}\frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}$$

Die ersten Summanden der Reihe bilden (bei unserem festen x_0) ein Polynom

$$T(x) = \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n \cdot ((x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + ... + x_0^{n-1}) - n \cdot x_0^{n-1})\,,$$

also eine stetige Funktion $T : (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \to \mathbb{R}$.

Also finden wir ein $0 < \delta < \delta_0$, so dass für $|x - x_0| < \delta$ gilt $|T(x) - T(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$. Da $T(x_0) = 0$ gilt erhalten wir für alle x mit $|x - x_0| < \delta$

$$|P(x) - P(x_0) - (x - x_0) \cdot R(x_0)| = |x - x_0| \cdot (\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}) = |x - x_0| \cdot \epsilon\,.$$

□

Aus dem Lemma können wir nun leicht folgern:

SATZ 0.3. *Sei $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann definiert P eine stetige Funktion auf dem Interval $(-R, R)$.*

Beweis. Sei $x_0 \in (-R, R)$ beliebig und $\epsilon_1 > 0$ vorgegeben. Sei $Q(x)$ die in Lemma 0.1 definierte Potenzreihe. Wähle ein δ wie in Lemma 0.2, so dass die Ungleichung (0.1) mit $\epsilon = 1$ erfüllt ist.

Dann gilt für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ die Ungleichung

$$|P(x) - P(x_0)| \leq |x - x_0| \cdot (1 + |Q(x_0)|)\,.$$

Wählen wir $0 < \delta_1 < \delta$, so dass $\delta_1 < \epsilon_1/(1 + |Q(x_0)|)$ gilt, so erhalten wir für alle x mit $|x - x_0| < \delta_1$ die Ungleichung $|P(x) - P(x_0)| < \epsilon_1$. □