ANALYSIS III

1. (08.10)

1.1. **Allgemeines. Ziel der Vorlesung:** Theorie und Bestimmung von Volumina, Oberflächen, Intergalen.

Wunsch: Definition von Volumina möglichst allgemeiner Mengen, [1], p.3-4.

Problem: Das Volumen kann nicht für alle Mengen sinnvoll definiert werden ([1], p.3-4;Banach-Tarski-Paradoxon, [5])

Lösungsansatz: Betrachte nur spezielle Mengen, die aber allgemein genug sein sollen.

1.2. **Sigma-Algebren.** Definition, Beispiele, einfache Eigenschaften, Erzeugung einer σ-Algebra, die Borel-σ-Algebra eines metrischen Raums, Produkt-σ-Algebra. [1], Section 1.1, sowie [4], p.7-8.

2. (11.10)

2.1. **Messbare Funktionen.** Messbare Funktionen zwischen Mengen mit σ-Algebren. Messbarkeit der stetigen Funktionen. Verträglichkeit der Messbarkeit mit algebraischen Operationd und Grenzwerten. [1, Section 1.5], für einige Beweise siehe auch [4, Sections 2.2 und 5.3]

3. (15.10)

3.1. **Maße und Maßräume.** Definition eines Maßes, Beispiele von (gewichteten) Zählmaßen, Eigenschaften der Maße; [1, Kapitel 1.2], [4, Kapitel 2.3].

3.2. **Äußere Maße I.** Definition eines äußeren Maßes, Definition des äußeren Lebesgue-Maßes, Eigenschaften des äußeren Lebesguemaßes; [4, Kapitel 3.1, 3.1.1], [1, Seite 8, Sätze 1.4.6, 1.4.7]

4. (18.10)

4.1. **Äußere Maße II.** Weitere Eigenschaften des äußeren Lebesgue-Maßes λ: Additivität bei Teilmengen mit positivem Abstand [4, Definition 4.3, Lemma 4.4], die Bestimmung $\lambda(Q)$ für Quader, [1, Satz 1.4.4].

4.2. **Konstruktion von Maßen aus äußeren Maßen.** Definition von μ-meßbaren Teilmengen für äußeres Maß μ, Satz von Caratheodery [1, Definition 1.3.4, Satz 1.3.5], [4, Theorem 3.5].

4.3. **Lebesgue-meßbare Mengen.** Lebesgue-Meßbarkeit der Borelmengen (Ende der Konstruktion des Lebesgue-Maßes), [1, Satz 1.4.2], [4, Theorem 4.2], Lebesgue-Nullmengen [1, Definition 1.4.8].

5. (22.10)

5.1. **Lebesgue-Maß.** Eigenschaften der Lebesgue-Nullmengen, Vergleich zwischen Borel-Mengen und Lebesgue-meßbaren Mengen, Existenz nicht meßbarer Mengen, Approximation durch offene und kompakte Mengen, Beispiele von Mengen positiven Maßes, die keine offene Teilmengen enthalten; [1, Seiten 11,12] und [4, Theorem 4.5 und Beispiel 4.9].

5.2. **Zusammenhang mit dem Riemann-Integral.** Wir können nun zeigen, dass der intuitive Begriff der Fläche, mit dem die Definition des Riemann-Integrals begründet wurde, im Rahmen der Maß-Theorie formal begründet werden kann. Damit können wir die Berechnung der Integrale benutzen, um die Fläche (also das zwei-dimensionale Lebesgue-Maß) von einigen Teilmengen der Ebene zu bestimmen, z.B. von Bällen.

SATZ 5.1. *Sei $f : [a, b] \to [0, \infty)$ eine stetige Funktion. Sei A die "Fläche unter dem Graphen", also die Menge der Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \in [a, b]$ und $0 \leq y \leq f(x)$. Dann ist die Menge A abgeschlossen, insbesondere Lebesgue-meßbar, und es gilt*

$$\lambda_2(A) = \int_a^b f\,.$$

Beweis. Betrachte eine beliebige Unterteilung $a = t_0 < t_1 ... < t_m = b$ des Intervals $[a, b]$. Für $j = 1, ..., m$ definiere $f_j^{\pm}$ als das Maximum bzw. Minimum von f auf dem Interval $[t_{j-1}, t_j]$.

Betrachte die zu dieser Unterteilung $\mathcal{U}$ und den gewählten Werten zugehörige Riemannschen Summen

$$R_{\mathcal{U}}^{\pm} := \sum_{j=1}^{m} (t_j - t_{j-1}) \cdot f_j^{\pm}\,.$$

Wegen der Eigenschaften des Riemannschen-Integrals gilt

$$\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^{-} \leq \int_a^b f \leq \mathcal{R}_{\mathcal{U}}^{+}\,.$$

Ferner konvergieren für jede Folge immer feiner werdenden Unterteilungen $\mathcal{U}_n$ die entsprechenden *unteren* und *oberen* Riemannschen Summen gegen denselben Wert $\int_a^b f$.

Die Aussage folgt, wenn wir für alle Unterteilungen $\mathcal{U}$ die Aussage

$$\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^- \leq \lambda_2(A) \leq \mathcal{R}_{\mathcal{U}}^+$$

nachweisen.

Nun beschreibt $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^-$ die Summe der Fläche von Rechtecken, die alle in A enthalten sind und sich höchstens in Teilmengen von Maß Null (ihren Seiten) schneiden. Deswegen gilt die linke Ungleichung.

Genauso ist $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^-$ die Summe der Fläche von Rechtecken, deren Vereinigung A überdeckt. Dies impliziert die rechte Ungleichung. □

6. (25.10)

6.1. **Eindeutigkeit des Lebesgue-Maßes.**

Verallgemeinerungen des folgenden Satzes werden möglicherweise im späteren Studium unter dem Namen "Eindeutigkeit des Haar-Maßes" vorkommen.

SATZ 6.1. *Sei $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ ein Maß mit den folgenden beiden Eigenschaften.*

1. $\mu(\bar{W}_1) = 1$, wobei $\bar{W}_1$ der abgeschlossene Würfel $\bar{W}_1 = [0,1] \times [0,1] ... \times [0,1]$ mit Seitenlänge 1 ist.

2. μ ist translationsinvariant, d.h., für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\mu(B + x) = \mu(B)$.

Dann gilt $\mu = \lambda_n$.

Beweis. Der Beweis erfolgt in mehreren kleinen Schritten.

1. Sei W_k ein offener Würfel (d.h. Quader mit gleich langen Seiten) der Seitenlänge $\frac{1}{k}$. Dann gilt $\mu(W_k) \leq \frac{1}{k^n} = \lambda_n(W_k)$ und $2^n \cdot \lambda_n(W_k) \geq \mu(\bar{W}_k) \geq \lambda_n(W_k)$.

Alle Würfel gleicher Seitenlänge haben gleiche μ-Maße, wegen der Translationsinvarianz. Man kann nun W_1 durch k^n Translate von $\bar{W}_k$ überdecken und k^n disjunkte Translate von W_k in W_1 hineinlegen. Ferner kann man $\bar{W}_{2k}$ in W_k hieneinlegen.

2. Für jeden rationalen Quader Q gilt $\mu(Q) \leq 2^n \cdot \Lambda_n(Q)$.

Für kleine Würfel haben wir die Aussage bereits beweisen. Für beliebige rationale Quader folgt die Aussage indem man den Quader in kleine Würfel zerlegt.

3. Es gilt $\mu(B) \leq 2^n \cdot \lambda_n(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Dies ergibt sich aus 2. und der Definition von $\lambda_n(B)$ mit Hilfe von Überdeckungen durch rationale Quader.

4. Ist $\lambda_n(A) = 0$, so gilt $\mu(A) = 0$.

Dies folgt direkt aus 3.

5. Für jeden Quader Q gilt $\mu(Q) = \mu(\bar{Q})$.

Denn die Differenz $\bar{Q} \setminus Q$ ist eine λ_n-Nullmenge, also auch eine μ-Nullmenge.

6. Es gilt $\mu(\bar{W}_k) = \mu(W_k) = \lambda(W_k)$ für alle k.

Das folgt nun aus 1.

7. Wie in 2. und 3. sehen wir nun $\mu(B) \leq \lambda_n(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

8. Ist $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ in $\bar{W}_1$ enthalten , so gilt

$$\mu(B) + \mu(\bar{W}_1 \setminus B) = \mu(\bar{W}_1) = \lambda_n(\bar{W}_1) = \lambda_n(B) + \lambda_n(\bar{W}_1 \setminus B)\,.$$

Da jeder der beiden Summanden auf der linken Seite nicht größer als der entsprechende Summand auf der rechten Seite ist, folgt $\mu(B) = \lambda_n(B)$.

9. Ist B beliebig, so unterteilt man es in abzählbar viele disjunkte Borel-Teilmengen, jede enthalten in einem Würfel der Seitenlänge 1. Aus 8 (und der σ-Additivität der Maße μ and λ_n) ergibt sich die behauptete Gleichheit der Maße. $\square$

Als Korollar erhalten wir

Folgerung 6.2. *Sei $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ ein Maß, das translationsinvariant ist. Ist $\mu(\bar{W}_1) = a < \infty$, so gilt für all $B \in \mathcal{B}$ die Gleichheit $\mu(B) = a \cdot \lambda_n(B)$.*

Beweis. Für $a = 0$ ergibt sich $\mu(\mathbb{R}^n) = 0$ indem wir $\mathbb{R}^n$ durch abzählbar viele Würfel mit Seitenlänge 1 überdecken.

Für $a > 0$ wenden wir Satz 6.1 auf das Maß $\mu_a(B) := \frac{1}{a} \cdot \mu(B)$ an. $\square$

6.2. **Transformationsformel I.** Mit Hilfe des folgenden Satzes kann man "leicht" Volumina von Polyedern bestimmen.

SATZ 6.3. *Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Dann gilt für alle $E \subset \mathbb{R}^n$ die Gleichheit $\lambda_n(T(E)) = |\det(T)| \cdot \lambda_n(E)$.*

Beweis. Sei zunächst T bijektiv. Dann ist T ein Homöomorphismus (stetig, mit stetiger Umkehrung T^{-1}).

Dann ist das Bild und Urbild jeder offenen Menge offen und von jeder Borelmenge eine Borelmenge. Weil $\lambda_n(E)$ gleich dem Infimum von $\lambda_n(O)$ über alle offenen Menge $E \subset O$, reicht es, die Aussage für alle offenen Mengen zu beweisen.

Definiere $\mu_T : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ durch $\mu_T(B) := \lambda_n(T(B))$. Weil λ_n ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist, ist auch μ_T ein Maß. Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ gilt wegen der Linearität von T die Gleichheit

$$\mu_T(B + x) = \lambda_n(T(B + x)) = \lambda_n(T(B) + T(x)) = \lambda_n(T(B)) = \mu_T(B)\,.$$

Ferner ist $\mu_T(K)$ auf jeder kompakten Menge endlich. Nach Folgerung 6.1, gibt es eine Zahl $a_T \in [0, \infty)$, so dass für jede Borelmenge B die Gleichheit $\lambda_n(T(B)) = a_T \cdot \lambda_n(B)$ gilt.

Beachte, dass die Zahl a_T nur von T und nicht von B abhängt.

Es bleibt zu zeigen, dass $a_T = |\det(T)|$ gelten muss. Dafür müssen wir T nur auf einer einzigen Menge auswerten!

Wir sehen, dass für je zwei bijektive lineare S, T die Gleichheit $a_{S\circ T} = a_S \cdot a_T$ gelten muss.

Sei nun T eine orthogonale Abbildung, also eine Abbildung die die Euklidische Norm erhält. Dann gilt für den Einheitsball $B = B_1(0)$ die Gleichheit $T(B) = B$. Wegen $\lambda_n(B) > 0$ folgt $a_T = 1$.

Nun benutzen wir den folgenden Satz aus der linearen Algebra: jede lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kann man schreiben als $T = Q_1 \cdot D \cdot Q_2$, wobei Q_1 und Q_2 orthogonale Matrizen und D eine Diagonalmatrix mit nichtnegativen Einträgen ist.

Dann gilt $a_T = a_{Q_1} \cdot a_D \cdot a_{Q_2} = a_D$ und $|\det(T)| = |\det(D)|$. Damit reicht es die Aussage für eine Diagonalmatrix D zu beweisen. Für die Matrix D mit Einträgen $d_1, ... \cdot d_n$ und den Einheitswürfel W_1 ist $D(W_1)$ ein Quader mit Seitenlängen $d_1, ..., d_n$. Also ist $\lambda_n(D(W_1)) = d_1 \cdot d_2 \cdot .... \cdot d_n = \det(D) \cdot \lambda_n(W_1)$.

Das beendet den Beweis im Fall des bijektiven T.

Ist T nicht bijektiv, so ist $|\det(T)| = 0$. Ferner ist $T(\mathbb{R}^n)$ in einer Hyperebene H enthalten. Die Hyperebene H ist jedoch das Bild einer achenparallelen Hyperebene H' unter einer orthogonalen Abbildung S. Also ist $H = S(H')$ eine Nullmenge und $\mu(T(E)) = 0$ für alle E. □

Im Beweis haben wir zwei Aussagen gezeigt, die eine gesonderte Erwähnung verdienen:

Folgerung 6.4. *Jede orthogonale Abbildung erhält das (äußere Lebesgue-Maß).*

Folgerung 6.5. *Jede Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge.*

Eine affine Abbildung des Euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung der Form $f(x) = v_0 + T(x)$, wobei $v_0 \in \mathbb{R}^n$ und $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear ist. Wegen der Translationsinvarianz von λ_n und dem obigen Satz gilt für jede Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ die Gleichheit $\lambda_n(f(A)) = |\det(T)| \cdot \lambda_n(A)$.

7. (29.10)

7.1. **Parallelotop.** Ein *Parallelotop* P im $\mathbb{R}^n$ ist das Bild $f(Q)$ des (abgeschlossenen) Einheitswürfels $Q = \bar{W}_1$ unter einer affinen Abbildung $f(x) = v_0 + T(x)$. Die *Kanten* von P sind die Bilder der *Kanten* von Q also die n Strecken $[v_0, v_0 + T(e_i)]$ in $\mathbb{R}^n$. Bis auf die Verschiebung v_0 sind die Kanten genau die Bilder der Standard-Einheitsvekteren, also die Spalten der darstellenden Matrix von T.

Q ist die Menge der Punkte der Form

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i \ \ ; \ \ 0 \leq \lambda_i \leq 1.$$

Also ist P die Menge der Punkte der Form

$$y = v_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot T(e_i) \ \ ; \ \ 0 \leq \lambda_i \leq 1.$$

Das Volumen des Parallelotops P ist, wie wir gesehen haben, genau $|\det(T)|$.

7.2. **Simpex.** Ein *Simplex* S (=Dreieck, Tetraeder, ...) mit *Ecken* $v_0, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge der Punkte

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot v_i \ \ ; \ \ \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\,.$$

(Dies ist die "konvexe Hülle" der Punkte $v_0, ..., v_n$.)

Wie oben sehen wir, dass S die Form $S = f(S_0)$, wobei f die affine Abbildung $f(x) = v_0 + T(x)$ und S_0 der Simplex mit den Ecken $0, e_1, ..., e_n$ ist und T die Matrix mit den Spalten $v_1 - v_0, v_2 - v_0, ..., v_n - v_0$ ist. Damit ist $\lambda_n(S) = \lambda_n(S_0) \cdot |\det(T)|$.

Lemma 7.1. *In den obigen Bezeichnungen gilt* $\lambda_n(S_0) = \frac{1}{n!}$.

Beweis. Sei Q der abgeschlossene Einheitswürfel, also die Menge aller Punkte mit Koordinaten $(x_1, ..., x_n)$, so dass $0 \leq x_i \leq 1$ für alle i gilt.

Betrachte für jede Permutation f der Menge $\{1, ..., n\}$ die abgeschlossene Menge S_f von allen Punkten $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit

$$1 \geq x_{f(1)} \geq x_{f(2)} \geq .... \geq x_{f(n)} \geq 0\,.$$

Dann ist die Vereinigung aller S_f der Einheitswürfel Q. Ferner schneiden sich S_f und S_g für verschiedene Permutationen f, g in einer Teilmenge einer Hyperebene, also in eienr Nullmenge. Letzlich ist S_f das Bild von S_{id} unter einer Bewegung, der Vertauschung der Koordinaten. Also haben alle Teilmengen S_f gleiches Lebesgue-Maß.

Daraus folgern wir $\lambda_n(S_f) = \frac{1}{n!}$ für alle Permutationen f.

Es bleibt noch zu zeigen, dass S_f dasselbe Maß wie unser Simplex S_0 hat.

Nun ist aber S_{id} selbst ein Simplex mit den Ecken $\{0, e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, ..., e_1 + e_2 + ... + e_n\}$. Ferner ist die Determinante der Matrix mit den Spalten $e_1, e_1 + e_2, ..., e_1 + ... + e_n$ genau 1. Das beendet den Beweis. $\square$

7.3. **Ellipse.** Wir betrachten noch das folgendene Beispiel. Sei E die Menge der Punkte (x, y) in der Ebene $\mathbb{R}^2$ für die $a^2 \cdot x^2 + b^2 \cdot y^2 \leq 1$ für $a, b > 0$ gilt. Dann ist E eine *Ellipse* also das Bild des Balls $B = \bar{B}_1(0)$ unter einer affinen (in diesem Fall einer linearen) Abbildung $T(x, y) = (\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$. Also gilt nach der Transformationsformel $\lambda_2(E) = 1/ab$.

7.4. **Hausdorff-Maße.** Unser nächstes Ziel ist ein anderer Zugang zum Lebesgue-Maß, der ohne die spezielle Rolle der Quader auskommt, uns neue Einsichten über das Lebesgue-Maß erlaubt und zu Oberflächen-Maßen und fraktalen Objekten führt.

Wir werden den folgenden Satz beweisen und das dort postulierte Maß konstruieren. Die Konstruktion ist letztlich weniger bedeutend als die Aussage selbst.

SATZ 7.2. *Sei $s \geq 0$ eine reelle Zahl. Dann existiert ein äußeres Maß $\mathcal{H}^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, genannt das s-dimensionale Hausdorff-Maß, mit folgenden Eigenschaften.*

1. *Alle Borel-Mengen sind $\mathcal{H}^s$-messbar.*
2. *Sei $s = m \leq n$ eine natürliche Zahl. Dann gilt für jede Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\mathcal{H}^m(E) = \lambda_m(E)$.*
3. *Sei $\lambda > 0$, E eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : E \to \mathbb{R}^n$ eine λ-Lipschitz Abbildung. Dann gilt*
$$\mathcal{H}^s(f(E)) \leq \lambda^s \cdot \mathcal{H}^s(E) .$$
4. *Gilt für eine Menge $E \subset \mathbb{R}^n$, dass $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, so gilt für alle $r > s$ die Gleichheit $\mathcal{H}^r(E) = 0$.*

Bevor wir mit der Konstruktion beginnen besprechen wir einige weitere Eigenschaften, die aus den vier oben geforderten folgen.

Folgerung 7.3. *Das Maß $\mathcal{H}^s$ wird erhalten unter Isometrien $f : E \to f(E) \subset \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist es invariant unter Translationen und Drehungen.*

Beweis. Wende die Eigenschaft (3) mit $\lambda = 1$ auf f und die Umkehrabbildung $f^{-1} : f(E) \to E$. □

Folgerung 7.4. *Ist $V \subset \mathbb{R}^n$ ein k-dimensionaler affiner Unterraum, so gilt $\mathcal{H}^s(V) = 0$ für alle $s > k$.*

Beweis. Die letzte Folgerung reduziert die Aussage auf $V = \mathbb{R}^k$. Für jeden Würfel in $\mathbb{R}^k$ ist $\mathcal{H}^k(W)$ endlich wegen der Eigenschaft (2), also $\mathcal{H}^s(W) = 0$ wegen der Eigenschaft (4).

Da $\mathbb{R}^k$ eine abzählbare Vereinigung von Würfeln ist, gilt auch $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^k) = 0$. □

8. (05.11)

8.1. **Eigenschaften des Hausdorff-Maßes, Hausdorff-Dimension.** Wendet man Eigenschaft (4) der Hausdorff-Maße auf offene Teilmengen an, so sieht man, dass für $s < n$ das Maß einer Teilmenge nicht "von außen durch Maße offener Mengen approximiert werden kann":

Folgerung 8.1. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und nicht leer. Dann gilt für alle $s < n$ die Gleichhheit $\mathcal{H}^s(U) = \infty$.*

Die in der nächsten Folgerung definierte Zahl $s_0(E)$ heißt die *Hausdorff-Dimension* einer Teilmenge E.

Folgerung 8.2. *Für jede Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ betrachte*

$$s_0(E) = \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(E) = 0\}\,.$$

Dann gilt $s_0(E) \leq n$. Für alle $s > s_0$ gilt $\mathcal{H}^s(E) = 0$. Für alle $s < s_0$ gilt $\mathcal{H}^s(E) = \infty$.

Jede in einem $\mathbb{R}^m$ enthaltene Teilmenge hat Hausdorff-Dimension höchstens m. Jede Teilmenge, die eine in einem $\mathbb{R}^m$ offene Teilmenge enthält hat Dimension mindestens m.

8.2. **Fraktale (Für die weitere Vorlesung und Klausur irrelevant.** Ein Würfel im $\mathbb{R}^n$ besteht (für jedes natürliche k) aus k^n "fast disjunkten" Würfeln, jeder von denen um den Faktor k kleiner als der ursprüngliche Würfel ist. Es liegt nahe, einen Begriff der Dimension entsprechend zu definieren. Wir werden (fast) sehen, dass in einer Klasse von Beispielen dies der Hausdorff-Dimension entspricht.

Sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, sei s eine Zahl, so dass $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ ist. (Für Zahlen s, die nicht ganz sind, spricht man von *Fraktalen* der Dimension s).

Sei $1 < \lambda$ eine reelle Zahl. Wir nehmen an, dass E in Teilmengen $E_1, ..., E_k$ zerlegt werden kann, so dass $\mathcal{H}^s(E_i \cap E_j) = 0$ für $i \neq j$ gilt. Wir nehmen letzlich an, dass jedes E_i isometrisch zu $\frac{1}{\lambda} \cdot E$ ist.

Dann erhalten wir

$$\mathcal{H}^s(E) = \sum \mathcal{H}^s(E_i) = k \cdot (\frac{1}{\lambda})^s \cdot \mathcal{H}^s(E)\,.$$

Wir folgern also $k = \lambda^s$ und

$$s = \frac{\log k}{\log \lambda}\,.$$

Die folgenden Beispiele werden in [4, Kapitel 4.1.2] beschrieben. Die Standard Cantor-Menge der Dimension $\frac{\log 2}{\log 3}$, der Serpinski-Teppich der Dimension $\frac{\log 8}{\log 3}$, die Koch-Schneeflocke der Dimension $\frac{\log 4}{\log 3}$, [6].

8.3. **Konstruktion der Hausdorff-Maße I.** Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\mathrm{diam}(A)$ ihren Durchmesser, also das Supremum der Abstände der Punkte aus A.

Sei $s \geq 0$ fest gewählt. Wir definieren das äußere Maß $h_\infty = h_\infty^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ wie folgt. Für eine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$h_\infty^s(E) := \inf_{E \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i} \sum_{i=1}^\infty (\mathrm{diam}(A_i))^s \, . \tag{8.1}$$

Ferner definieren wir (nach wie vor bei demselben festen s) für jedes $\epsilon > 0$ folgende Varianten h_ϵ^s des obigen äußeren Maßes. Das äußere Maß h_ϵ^s ist ebenfalls durch die Formel (8.1) gegeben, wobei wir von den Mengen A_i zusätzlich verlangen, dass $\mathrm{diam}(A_i) < \epsilon$ für alle i gelten soll.

Leicht sehen wir:

1. Die Abbildungen h_∞^s und h_ϵ^s sind äußere Maße.

Dies folgt genau wie für das Lebesgue-Maß, [1], [4].

2. Für $\epsilon_1 < \epsilon_2$ gilt für alle Teilmengen E

$$h_{\epsilon_1}^s(E) \geq h_{\epsilon_2}^s(E) \, . \tag{8.2}$$

Dies folgt direkt aus der Definition.

2. Die äußeren Maße h_∞^s und h_ϵ^s sind translationsinvariant.

Dies folgt, weil der Durchmesser unter Translationen sich nicht ändert.

3. Man kann sich in der Formel (8.1) auf Teilmengen A_i der Menge E beschränken.

Um das zu sehen, ersetzt man einfach A_i durch $A_i \cap E$ und sieht, dass der Durchmesser dadurch nicht größer wird.

4. Ist $f : E \to F = f(E)$ eine λ-Lipschitz Abbildung, so gilt für alle ϵ die Ungleichung

$$h_\epsilon^s(F) \leq \lambda^s \cdot h_\epsilon^s(E) \, . \tag{8.3}$$

Dies ergibt sich aus (3) und der Tatsache, dass sich Durchmesser unter λ-Lipschitz Abbildungen mindestens um den Faktor λ verkleinern.

5. Für $s < r$ und alle $E \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$h_\epsilon^r(E) \leq \epsilon^{r-s} \cdot h_\epsilon^s(E) \, . \tag{8.4}$$

Dies folgt weil für jede der Teilmengen A_i mit $\mathrm{diam}(A_i) < \epsilon$ die Ungleichung $\mathrm{diam}(A_i)^r \leq \mathrm{diam}(A_i)^s \cdot \epsilon^{r-s}$.

Bemerkung 8.1. Die äußeren Maße h_ϵ^s erfüllen haben fast alle richtigen Eigenschaften. was fehlt ist die Messbarkeit der Borelmengen, eine Eigenschaft, die wir für das Lebesgue-Maß mit Hilfe der Zerstückelung der Quader in kleine Teile bewiesen haben, siehe [4, Lemma 4.4].

9. (08.11)

9.1. **Konstruktion der Hausdorff-Maße II.** Um das Problem der Nicht-Messbarkeit zu beheben definieren wir:

$$\hat{\mathcal{H}}^s(E) := \lim_{\epsilon\to 0} h^s_\epsilon(E)\,.$$

Der Grenzwert existiert wegen Schritt 2. Die Eigenschaften 1,3,4 bleiben für $\hat{\mathcal{H}}^s$ erhalten. Die Eigenschaft (5) impliziert, dass für jede Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ mit $\hat{\mathcal{H}}^s(E) < \infty$ für alle $r > s$ die Gleichheit $\hat{\mathcal{H}}^r(E) = 0$ gilt.

Genauso wie für das Lebesgue-Maß zeigt man nun, dass für Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit Abstand größer ϵ die Gleichheit $h^s_\epsilon(A \cup B) = h^s_\epsilon(A) + h^s(B)$ gilt, [4, Lemma 4.4]. Daraus folgt, dass

$$\hat{\mathcal{H}}^s(A \cup B) = \hat{\mathcal{H}}^s(A) + \hat{\mathcal{H}}^s(B)\,,$$

für alle Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit positivem Abstand gilt. Wir für das Lebesgue-Maß folgt daraus, dass alle Borelmengen $\hat{\mathcal{H}}^s$-messbar sind.

Die äußeren Maße $\hat{\mathcal{H}}^s$ erfüllen also die Eigenschaften (1),(3),(4) aus Satz 7.2.

Mit Hilfe des folgenden Lemmas werden wir die Konstruktion leicht beenden:

Lemma 9.1. *Sei $W^m \subset \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ der abgeschlossene m-dimensionale Einheitswürfel. Dann gilt*

$$0 < \hat{\mathcal{H}}^m(W^m) < \infty\,.$$

Unter Benutzung dieses Lemmas beenden wir zunchst den Beweis der Konstruktion. Wir setzen $\alpha_s = 1$, wenn s keine natütrliche Zahl ist und $\alpha_m = 1/\hat{\mathcal{H}}^m(W^m)$. Wir definieren nun für alle $s \geq 0$

$$\mathcal{H}^s(E) := \alpha_s \cdot \hat{\mathcal{H}}^s(E)\,.$$

Die Gültigkeit der Eigenschaften (1),(3), (4) bestehen. Folglich müssen wir nur zeigen, dass die Eigenschaft (2) erfüllt wird.

Nun ist $\mathcal{H}^s : \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \to [0,\infty]$ ein translationsinvariantes Maß,das auf auf dem m-dimensionalen Einheitswürfel den Wert 1 annimmt. Also folgt aus Satz 6.1, dass $\mathcal{H}^m$ mit λ_m auf allen Borelteilmengen von $\mathbb{R}^m$ übereinstimmt.

Das beendet den Beweis von Satz 7.2.

Es fehlt noch:

Beweis. [Beweis von Lemma 9.1] Für jedes $\epsilon > 0$ finden wir ein $k > 0$, so dass der Würfel mit Seitenlänge $\frac{1}{k}$ Durchmesser $\frac{\sqrt{m}}{k} < \epsilon$ hat.

Überdeckt man $W = W^m$ durch k^m solche Würfel, so folgt

$$h^m_\epsilon(W) \leq k^m \cdot (\frac{\sqrt{m}}{k})^m \leq \sqrt{m}^m .$$

Das beweist $\hat{\mathcal{H}}^m(W) \leq \sqrt{m}^m$.

Sei andererseits $W \subset \cup A_i$ eine Überdeckung von W. Sei B_i eine abgeschlossene Kugel in $\mathbb{R}^m$ mit Zentrum in einem Punkt von A_i und Radius $\mathrm{diam}(A_i)$. Dann gilt $A_i \subset B_i$ und $\lambda_m(B_i) = \sigma_m \cdot \mathrm{diam}(A_i)^m$, wobei σ_m das m-dimensionale Lebesgue-Maß der Einheitskugel im $\mathbb{R}^m$ bezeichnet. Nun folgt

$$\sum \mathrm{diam}(A_i)^m = \frac{1}{\sigma_m} \cdot \sum_i \lambda_m(B_i) \geq \frac{1}{\sigma_m} \cdot \lambda_m(W) = \frac{1}{\sigma_m} .$$

Das beweist $\hat{\mathcal{H}}^m(W^m) \geq \frac{1}{\sigma_m}$. □

10. (12.11)

10.1. **Messbare Funtkionen II.** Einfache Funktione, Approximation von messbaren Funtkionen durch einfache Funktionen, [1, p. 15-16].

10.2. **Integral I.** Integral einfacher nicht-negativer Funktionen, Integral messbarer nichtnegativer Funktionen, Satz von der monotonen Konvergenz , [1, p. 16-17].

11. (15.11)

11.1. **Integral II.** Integrierbare Funktionen, Kriterium der Integrierbarkeit, Integriebarkeit von Regelfunktionen, Beispiele, [1, p. 17-21].

12. (19.11)

12.1. **Kovergenzsätze.** Satz über die monotone Konvergenz, Satz über die majorisierte Konvergenz, Integration durch Ausschöpfung, [1, Satz 1.6.4, Satz 1.7.1, Satz 1.7.2, Satz 1.7.3].

12.2. **Nullmengen.** Die Bedeutung von "fast überall", [1, Satz 1.6.14, Definition 1.6.15, Satz 1.6.16].

13. (22.11)

13.1. **Berechnung von Integralen I.** Sätze von Tonneli, Fubini, Cavalieri, [4, Theoreme 9.2, 9.3, 9.4].

In den Quellen [4], [1] sind die Beweise nur grob skizziert. Vollständige Beweise finden sich in jedem Analysis-Lehrbuch, z.B. bei Königsberger.

Hier ist eine weitere Skizze mit 10 Schritten.

1) Der Satz von Tonelli impliziert den Satz von Fubini.

Hierfür zerlege jede messbare Funktion f als $f = f_+ - f_-$.

2) Das Prinzip von Cavalieri ist genau der Satz von Tonelli für den Fall einer charakteristischen Funktion.

3) Der Satz von Tonelli gilt für die charakteristische Funktion eines Quaders.

Das rechnet man direkt nach.

4) Gelten die Sätze von Fubini oder Tonelli für zwei Funktionen f_1, f_2, so auch für Linearkombinationen von f_1 und f_2.

Das ist eine Folgerung aus der Tatsache, dass die Vereinigung von zwei Nullmengen eine Nullmenge ist und der Linearität der Integrale.

5) Gilt der Satz von Tonelli für Funktionen $0 \leq f_1 \leq ...., \leq f_n \leq$ und ist f der punktweise Grenzwert der Funktionen f_i, so gilt der Satz für f.

Dies folgert man aus der Tatsache, dass eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge ist und dem Satz über die monotone Konvergenz (angewendet auf beiden Seiten der zu beweisenden Gleichheit).

6) Es reicht den Satz von Tonelli für charakteristische Funktionen χ_A zu beweisen.

Mit (4) würde die Aussage für einfache Funktionen und mit (5) dann für alle messbaren Funktionen folgen, da man jede messbare Funtkion f als Grenzwert einer monotonen Folge einfacher Funktionen darstellen kann.

7) Der Satz von Tonelli gilt für die charakteristische Funktion χ_A jeder Nullmenge A.

Um das zu sehen, kann man A durch eine Borelmenge $A \subset B$ ersetzen, die auch eine Nullmenge ist. Für jedes $\epsilon > 0$ kann man B durch Quader Q_i überdecken, so dass $\sum \lambda(Q_i) < \epsilon$ ist. Schreibt man $f^\epsilon = \sum_i \chi_{Q_i}$, so gilt $f^\epsilon \geq \chi_A$ und der Satz gilt für f^ϵ nach (5). Daraus schließt man, mit Hilfe einer Aufgabe auf dem neuen Blatt, dass auf beiden Seiten der zu beweisenden Gleichheit 0 steht.

8) Es reicht, den Satz von Tonelli für charakteristische Funktionen χ_K kompakter Mengen zu beweisen.

Jede messbare Menge A ist bis auf eine Nullmenge C eine Vereinigung einer aufsteigender Folgen kompakter Mengen. Die Aussage folgt nun aus (5) und (7).

9) Für jede kompakte Menge K gibt es eine absteigende Folge von kompakten Mengen K_i, so dass $K \subset K' := \cap K_i$, die Differenz $K' \setminus K$ eine Nullmenge ist und jede Menge K_i die Vereinigung einer Nullmenge und einer endlichen disjunkten Menge von Quadern ist.

Um das zu sehen, überdekct man K durch offene rationale Quader, so dass sich das Volumen der Vereinigugng von dem Volumen von

K nur um $\frac{1}{i}$ unterscheidet. Da K kompakt ist, reichen nur endlich viele Quader aus. ersetzt man die offenen Quader durch abgeschlossenen und unterteilt man die Quader in kleinere Würfel, so kann man annnehmen, dass sich die Würfel paarweise nur in Nullmengen schneiden. Das definiert Mengen $\hat{K}_i$. Nun setzt man $K_i = \cap_{k=l}^{i} K_l$ und sieht, dass alle Bedingungen erfüllt sind.

10) Für die Mengen K_i aus (9) folgt der Satz von Tonelli für χ_{K_i} aus (3), (4) und (7). Für $\chi_{K'}$ folgt der Satz aus dem Satz über die majorisierte Konvergenz. Schließlich folgt der Satz für χ_K aus (7).

13.2. **Einfache Beispiele.** Als Spezialfall des Satzes von Tonelli-Cavalieri, [4, Theorem 9.4], sehen wir folgende Aussage. Sei $A = B \times C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Die Menge A ist genau dann λ_{n+m}-messbar, wenn B λ_n-messbar in $\mathbb{R}^n$ und C λ_m-messbar in $\mathbb{R}^m$ gilt. Ferner ist

$$\lambda_{n+m}(A) = \lambda_n(B) \cdot \lambda_m(C)\,.$$

In dem Satz von Cavalieri ist die Aussage nicht enthalten, dass die Messbarkeit von B und C die Messbarkeit von A impliziert. Das muss man noch zusätzlich beweisen.

Das nächste Beispiel ist möglicherweise aus der Schule in Dimension 3 bekannt.

PROPOSITION 13.1. *Sei $H \subset \mathbb{R}^n$ eine affine Hyperebene. Sei $B \subset H$ eine Borelteilmenge. Sei $p \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Der Kegel $K(B,p)$ mit Spitze p und Basis B ist die Vereinigung der linearen Strecken, die p mit Punkten $b \in B$ verbinden. Dann ist $K(B,p)$ eine Borelmenge und es gilt*

$$\lambda_n(K(B,p)) = \frac{1}{n} \cdot h \cdot \mathcal{H}^{n-1}(B)\,,$$

wobei h die Höhe des Kegels, also den Abstand von p bis zur affinen Hyperebene H bezeichnet.

Beweis. Alle Objekte und Aussagen, die in der Formulierung erscheinen sind invariant unter Bewegungen von $\mathbb{R}^n$. Wir können folglich nach einer Bewegung o.B.D.A. annehmen, dass H die Hyperebene $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ist. In diesem Fall hat p Koordinaten (p', x_n), mit $p' \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $h = |x_n|$ ist in diesem Fall der Abstand von p bis H. Nach einer Speigelung an H, können wir annehmen, dass $x_n = h$ gilt.

Die Menge K ist die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ der Form $x = \lambda \cdot p + (1-\lambda) \cdot b$, wobei $\lambda \in [0,1]$ und $b \in B$ liegt.

Die Aussage, dass K eine Borelmenge ist, soll nur skizziert werden: Man zeigt zunächst die Aussage für den Fall kompakter Mengen B (in diesem Fall ist K auch kompakt), und dann indem man zeigt, dass Vereinigungen , Komplemente und Durchschnitte von Basen den entrsprechenden Operationen mit den Kegeln über diesen Basen entsprechen.

Für $r \in \mathbb{R}$ hat

$$K_r := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} | (x,r) \in K\}$$

die folgende Form. Für $r < 0$ oder $r > h$ ist K_r leer. Für $r \in [0,h]$ ist K_r genau die Menge $(1 - \frac{r}{h}) \cdot B$.

Folglich gilt

$$\lambda_{n-1}(K_r) = (1 - \frac{r}{h})^{n-1} \cdot \lambda_{n-1}(B) = (1 - \frac{r}{h})^{n-1} \cdot \mathcal{H}^{n-1}(B)\,.$$

Nach dem Satz von Cavalieri-Tonelli ist

$$\lambda_n(K) = \int_{[0,h]} (1 - \frac{r}{h})^{n-1} \cdot \mathcal{H}^{n-1}(B)\, d\lambda_1(r) = \mathcal{H}^{n-1}(B) \cdot (-\frac{1}{n} h \cdot (1 - \frac{r}{h})^n)|_0^h\,.$$

Das beendet den Beweis. □

14. (26.11)

14.1. **Transformationsformel II.** Motivation und Formulierung des Transformationssatzes, [2, Kapitel 2.2].

14.2. **Anwendungsbeispiele.** Anwendungen der Sätze von Fubini und Tonelli, Polarkoordinaten, Volumina von Kugeln [2, p. 34-35], [4, Lemma 9.11].

15. (29.11)

15.1. **Weitere Beispiele der Integralberechnung.** Das Gaußsche Integral $\int_R e^{-t^2}\, dt$, [2, p. 36]. Ein weiteres Beispiel ist die folgende allgemeine Formel für die Berechnung der Integrale rotationssymmetrischer Funktionen:

Lemma 15.1. *Sei $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ messbar und sei n eine natürliche Zahl. Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = g(||x||)$ ist λ_n-messbar und es gilt*

$$\int_{R^n} f = n \cdot \sigma_n \cdot \int_{[0,\infty)} g(r) \cdot r^{n-1}\, dr\,,$$

wenn immer die rechte Seite definiert ist.

Den Beweis kann man aus der Trasnformationsformel für die n-dimensionalen Polarkoordinaten herleiten, [4, p. 89-90]. Hier ist die Skizze des alternativen direkten Beweises.

Für die charakteristische Funktion g eines Intervals $[0,a]$ steht links das Volumen der Kugel mit Radius a und rechts $\sigma_n \cdot a^n$.

Stimmt die Formel für g_1, g_2 so auch für Linearkombinationen von g_1 udn g_2. Damit folgt die Aussage für alle Treppenfunktionen g. Wie im Beweis der Sätze von Fubini und Tonellie benutzt man jetzt die Sätze über die monotone und majorisierte Konvergenz, um die Aussage auf alle nichtnegativen g zu übertragen. Dann folgt die Aussage auch für alle g, für die die rechte Seite definiert ist.

15.2. **Vorbereitungen zum Beweis des Transformationssatzes.** Wir starten mit etwas allgemeineren vorbereitenden Aussagen, die wir spter verwenden wollen.

Grundlegend sind zwei folgende Aussage aus Analysis II, die beide durch betrachten der Bilder von linearen Segmenten beweisen werden:

Lemma 15.2. *Sei $U \in \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \to \mathbb{R}^k$ eine $\mathcal{C}^1$ Abbildung. Für jede kompakte konvexe Teilmenge $K \subset U$ ist die Einschränkung $\Phi : K \to \mathbb{R}^k$ Lipschitz stetig.*

Lemma 15.3. *Sei Φ, U wie eben. Sei $x \in U$ und sei die lineare Abbildung $L = D_x\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ injektiv. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $y, z \in B_\delta(x)$ folgende Ungleichungen gelten:*

$$\frac{1}{1+\epsilon} \cdot ||L(y) - L(z)|| \leq ||\Phi(y) - \Phi(z)|| \leq (1+\epsilon) \cdot ||L(y) - L(z)|| \, .$$

In anderen Worten ist die Komposition $\Psi := \Phi \circ L^{-1} : L(B_\delta(x)) \to \Phi(B_\delta(x))$ injektiv und Ψ und die Umkehrabbildung von Ψ haben Lipschitzkonstanten höchstens $1 + \epsilon$.

Jede offene Menge U ist eine abzählbare Vereinigung von kompakten rationalen in U enthaltenen Quadern. Wir folgern:

Folgerung 15.4. *Sei Φ, U wie oben. Ist $A \subset U$ eine λ_n-Nullmenge, so ist $\Phi(A)$ eine $\mathcal{H}^n$-Nullmenge in $\mathbb{R}^k$.*

Beweis. Für Teilmengen A, die in einer komakpten konvexen Teilmenge $K \subset U$ entahlten sind, folgt die Aussage aus den Eigenschaften des Hausdorff-Maßes und Lemma 15.2. Für beliebige A folgt es durch die obige Zerlegung. □

Folgerung 15.5. *Ist $A \subset U$ eine λ_n-messbare Teilmenge, so ist $\Phi(A)$ eine $\mathcal{H}^n$-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^k$*

Beweis. Die Aussage gilt wegen der Stetigkeit von Φ für kompakte Teilmengen A, also auch für abzählbare Vereinigungen von kompakten Teilmengen. Jede Lebesgue-messbare Teilmenge von U ist eine Vereinigung von abzählbar vielen komapkten Teilmengen und einer λ_n-Nullmenge. Damit ergibt sich die Aussage aus der vorhergehenden Folgerung. □

Die nächste Folgerung besagt insbesondere, dass es keine stetig differenzierbaren Peano-Kurven, [7], gibt

Folgerung 15.6. *Sei Φ, U wie oben. Ist $k > n$ so ist $\Phi(U)$ eine λ_k-Nullmenge in $\mathbb{R}^k$.*

Beweis. Das Bild jeder kompakten konvexen Menge K in U hat endliches n-dimensionales Hausdorff-Maß in $\mathbb{R}^k$, also $\lambda_k(\Phi(K)) = 0$. Der Rest des Beweises ist wie oben. □

16. (03.12)

16.1. **Beweis des Transformationssatzes.** Nun kommen wir zum eigentlichen Beweis des Satzes, vgl. [2, Kapitel 2.3]:

SATZ 16.1. *Sei $\Phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus, U, V offen in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für messbare $f : V \to \mathbb{R}$, die nicht-negativ bzw. integrierbar sind:*

$$\int_U (f \circ \Phi)(x) \cdot |\det D\Phi(x)|\, dx = \int_V f(y)\, dy\,.$$

Beweis. Wegen der Linearität der beiden Seiten, reicht es, den Satz für nicht-negative f zu beweisen.

Argumentiert man mit der Linearität und benutzt die Sätz über die monotone und majorisierte Konvergenz, wie im Beweis des Satzes von Tonelli, so führt man die Aussage auf den Fall zurück, dass f die charakteristische Funktion einer kompakten Menge $C \subset V$ ist. Wir müssen also für jede kompakte Teilmenge $K \subset U$ die folgende Gleichheit verifizieren:

$$\int_K |\det D\Phi(x)|\, dx = \lambda_n(\Phi(K))\,.$$

Sei K fest gewählt. Sei $\epsilon > 0$ beliebig.

Für jeden Punkt $x \in U$ finden wir ein δ wie in Lemma 15.3. Durch eine Verkleinerung von δ können wir ferner für alle $z \in B_\delta(x)$ die folgende Ungleichung annehmen

$$\frac{1}{1+\epsilon} \cdot |\det L| \leq |\det(D\Phi(z))| \leq (1+\epsilon) \cdot |\det L|\,.$$

Dann gilt für jede Teilmenge $A \subset B_\delta(x)$,

$$\int_A |\det D\Phi(z)|\, dz \leq \int_A (1+\epsilon) \cdot |\det(L)| = (1+\epsilon) \cdot \lambda_n(L(A))\,.$$

Da $L \circ \Phi^{-1} : \Phi(A) \to L(A)$ eine $(1+\epsilon)$-Lipschitz Abbildung ist, folgt

$$\lambda_n(L(A)) \leq (1+\epsilon)^n \cdot \lambda_n(\Phi(A))\,.$$

Insgesamt haben wir für jede Teilmenge $A \subset B_\delta(x)$ die Ungleichung

$$\int_A |\det D\Phi(x)|\,dx = (1+\epsilon)^{n+1} \cdot \lambda_n(\Phi(A))\,.$$

Nun überdecken wir K durch endlich viele Bälle $B_\delta(x)$ und zerlegen K in eine disjunkte Vereinigung von Teilmengen A_i mit $A_i \subset Q_i$. Summieren wir die Ungleichungen für alle A_i, so folgt

$$\int_K |\det D\Phi(x)|\,dx \leq (1+\epsilon)^{n+1} \cdot \lambda_n(\Phi(K))\,.$$

Da ϵ beliebig war, sehen wir

$$\int_K |\det D\Phi(x)|\,dx \leq \lambda_n(\Phi(K))\,.$$

Die umgekehrte Ungleichung zeigt man genauso und beendet damit den Beweis. □

16.2. **Transformationsformel III.** Wir können unsere Transformationsformel für lineare Abbildungen wie folgt verallgemeinern:

SATZ 16.2. *Sei $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, identifiziert mit ihrer darstellenden Matrix. Dann gilt für jede λ_m-messbare Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^m$ die Gleichheit*

$$\mathcal{H}^m(T(E)) = \sqrt{\det(T^t \cdot T)} \cdot \lambda_m(E)\,.$$

Dem Beweis dieser Folgerung schicken wir eine kurze Erklärung voraus. In der obigen Formel ist T^t die transponierte Matrix (=Abbildung) von T, die eine Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ repräsentiert. Also ist $T^t \cdot T$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^m$ und ihre Determinante ist wohldefiniert. Ist ferner $m = n$, so gilt $\det(T) = \det(T^t)$ und $\sqrt{\det(T^t \cdot T)} = |\det(T)|$, so dass Folgerung 7.5 die Transformationsformel aus Satz 6.3 verallgemeinert.

Letztlich bemerken wir, dass die Einträge der Matrix $T^t \cdot T$ genau die m^2 Skalarprodukte der Spaltenvektoren der Matrix T sind. Insbesondere ist $T^t \cdot T$ die Einheitsmatrix genau dann, wenn T die Standardbasis auf ein orthonormales m-Tupel von Vektoren abbildet, also genau dann, wenn $T : \mathbb{R}^m \to T(\mathbb{R}^m)$ eine Isometrie ist.

Beweis. [Beweis des Satzes 16.2] Ist T nicht injektiv, so hat $T^t \cdot T$ Rang kleiner m und ihre Determinante ist 0. Ferner liegt $T(\mathbb{R}^m)$ in einem linearen Unterraum der Dimension höchstens $(m-1)$, also ist $\mathcal{H}^m(T(\mathbb{R}^m)) = 0 = \mathcal{H}^m(T(E))$ für jede Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^m$. Also gilt in diesem Fall die Gleichheit.

Sei nun T injektiv. Dann ist $V := T(\mathbb{R}^m)$ eine m-dimensionaler Euklidischer Raum und wir finden eine lineare Isometrie $S : V \to$

$\mathbb{R}^m$. Wegen Folgerung 7.3 erhält S das m-dimensionale Hausdorff-Maß jeder Teilmenge. Also gilt nach dem Transformationssatz 6.3 für jede Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^m$ die Gleichheit

$$\mathcal{H}^m(T(E)) = \mathcal{H}^m(S(T(E)) = \mathcal{H}^m(S \circ T)(E) = |\det(S \circ T)| \cdot \lambda_m(E) .$$

Schließlich ist

$$|\det(S \circ T)| = \sqrt{\det((S \circ T)^t \cdot (S \circ T))} = \sqrt{\det(T^t \circ S^t \circ S \circ T)} .$$

Nun ist aber die Abbildung S eine Isometrie, also skalarprodukterhaltend. Daraus folgt, dass $S^t \circ S$ die Identität von V auf sich, also ist $T^t \circ S^t \circ S \circ T = T^t \circ T$. Das beendet den Beweis. □

16.3. **Transformationsformel IV.** Nun verwenden wir Satz 16.2 anstatt Satz 6.3, um die folgende Verallgemeinerung des Transformationssatzes zu beweisen, mit dessen Hilfe wie die Oberflchen (das n-dimensionale Maß "guter" Teilmengen von $\mathbb{R}^k$ berechnen können):

SATZ 16.3. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \geq n$ und sei $\Phi : U \to \mathbb{R}^k$ eine injektive stetig differenzierbare Abbildung. Sei $M := \Phi(U) \subset \mathbb{R}^k$. Sei $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{H}^n$-messbare Funktion, die nicht-negativ oder auf M integrierbar ist. Dann gilt*

$$\int_U (f \circ \Phi)(x) \sqrt{\det(D\Phi(x)^t \circ D\Phi(x))}\, d\lambda_n(x) = \int_M f(y)\, d\mathcal{H}^n(y) \tag{16.1}$$

Insbesondere gilt für jede λ_n-messbare Teilmenge $A \subset U$ die Formel:

$$\mathcal{H}^n(\Phi(A)) = \int_A \sqrt{\det(D\Phi(x)^t \circ D\Phi(x))}\, d\lambda_n(x) . \tag{16.2}$$

Der Transformationssatz (Satz 16.1) ist ein Spezialfall des obigen Satzes 16.3, unter den zusätzlichen Annahmen $k = n$ und $\Phi : U \to M$ ein Diffeomorphismus. Satz 16.3 wird in der Literatur (in einer leicht allgemeineren Form) häufig als die "Flächenformel" bezeichnet.

17. (06.12)

17.1. **Längen von Kurven.** Bevor wir Satz 16.3 beweisen, besprechen wir einige Spezialfälle. Ist $n = 1$, so ist U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und für $s \in U$ ist das Differential $D\Phi(s)$ eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$, die durch den Vektor $\Phi'(s) := L(1) \in \mathbb{R}^k$ repräsentiert wird. In diesem Fall ist $D\Phi(s)^t \circ D\Phi(s)$ eine 1×1 Matrix, also eine Zahl, und zwar das Skalarprodukt von $\Phi'(s)$ mit sich selbst. Also ist $\sqrt{\det(D\Phi(s)^t \circ D\Phi(s))} = ||\Phi'(s)||$. Nun sehen wir leicht:

Folgerung 17.1. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Interval und $\gamma :\to \mathbb{R}^k$ eine injektive $\mathcal{C}^1$ Kurve. Dann stimme die Länge*

$$\ell(\gamma) = \int_I ||\gamma'(s)||\, ds$$

von γ mit $\mathcal{H}^1(\gamma(I))$ überein.

Beweis. Für offene Intervale I ist die Folgerung genau (16.2) im Fall $n = 1$, wie wir gerade gezeigt haben. Ist I nicht offen, so benutzt man die Gültigkeit der Aussage für die Kurve $\gamma : I^o \to \mathbb{R}^k$ (hier ist I^o das Innere des Intervals I) und die Tatsache, dass $\gamma(\partial I)$ endlich, also eine $\mathcal{H}^1$-Nullmenge ist. □

Für Beispiele von Berechnungen von Längen verweise ich auf das letzte Semester, siehe auch [2, p. 62-63], [4, Beispiel 10.10].

17.2. **Lineare Algebra.** Um weitere Rechnungen zu vereinfachen zeigt man folgende Aussage, siehe [2, Satz 3.3.1] für den Beweis.

Lemma 17.2. *Sei $k \geq n$ und sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ eine lineare Abbildung deren Matrix spaltenvektoren $a_1, ..., a_n$ hat. Seien $v_{n+1}, ..., v_k \in \mathbb{R}^k$ orthonormale Vektoren, die alle zu $L(\mathbb{R}^n)$ senkrecht sind. Ist $\hat{L}$ die $k \times k$ Matrix mit Spaltenvektoren $(a_1, ..., a_n, v_{n+1}, ..., v_k)$, so gilt*

$$\sqrt{\det(L^t \cdot L)} = |\det \hat{L}|\,.$$

Geometrisch besagt das Lemma, dass das $\mathcal{H}^n$-Maß von $L(W)$ (hier ist W der Einheitswürfel in $\mathbb{R}^n$) gleich dem k-dimensionalen Volumen des Parallelotops mit den Kanten $a_1, ..., a_n, v_{n+1}, ..., v_k$ ist.

Folgender Spezialfall wird besonders häufig verwendet um die Oberflächen auszurechnen:

Beispiel 17.1. Seien $s_1, ..., s_n$ reelle Zahlen. Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ gegeben durch $a_i := L(e_i) := e_i + s_i \cdot e_{n+1}$, wobei e_i die kanonische ON-Basen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{n+1}$ bilden. Dann gilt

$$\sqrt{\det L^t \cdot L} = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^n s_i^2}\,.$$

Um das zu beweisen, definieren wir $\hat{v} = e_{n+1} + \sum_{i=1}^n -s_i \cdot e_i$. Dann ist $\hat{v}$ orthogonal zu $a_1, ..., a_n$ und $v := \hat{v}/||\hat{v}||$ ist orthogonal zu $L(\mathbb{R}^n)$ und hat Norm 1. Wir müssen also nur die Determinante der Matrix $\hat{L}$ mit Spalten $(a_1, ..., a_n, v)$ ausrechnen, um das gewünschte Ergebnis zu bekommen. Die Determinante berechnet man den Faktor $\frac{1}{||\hat{v}||}$ ausklammert und dann (sukszessive) zu der letzten Zeile das $-s_i$-Vielfache der

i-ten Zeile addiert und dadurch die Matrix in eine Dreiecksmatrix transformiert.

17.3. **Oberflächen von Graphen.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $h : U \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion. Betrachte den "Graphen" der Funktion, also die Menge $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ der Punkte $(x, h(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}$, mit $x \in U$. Also ist M das Bild $M = \Phi(U)$ der injektiven $\mathcal{C}^1$-Abbildung $\Phi(x) = (x, h(x))$.

Das Differential $D\Phi(x)$ im Punkt x hat genau die in Beispiel 17.1 beschriebene Form mit $s_i(x) = h_{x_i}(x) = \partial_i h(x)$, die i-partielle Ableitung von h im Punkte x.

Die Summe $h_{x_i}^2$ ist $||\nabla h(x)||^2$, wobei $\nabla h(x)$, der *Gradient* von h im Punkte x, also der Vektor in $\mathbb{R}^n$ mit Einträgen $h_{x_i}(x)$ ist.

Die Flächenformel (Satz 16.3), Lemma 17.2 und Beispiel 17.1 implizieren also die

Folgerung 17.3. *Sei $\Phi(x) = (x, h(x))$ die natürliche Parametrisierung des Graphen der $\mathcal{C}^1$-Funktion $h : U \to \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\mathcal{H}^n(\Phi(U)) = \int_U \sqrt{1 + ||\nabla h(x)||^2}\, dx\,.$$

17.4. **Oberfläche der Sphäre.** Als nächstes Beispiel zeigen wir, vgl. [2, p. 63-64]:

SATZ 17.4. *Sei $\mathbb{S}^2$ die 2-dimensionale Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$, d.h. die Menge aller Punkte in $\mathbb{R}^3$ mit Norm 1. Dann gilt $\mathcal{H}^2(\mathbb{S}^2) = 4\pi$.*

Beweis. Schreibe die Sphäre $\mathbb{S}^2$ als Vereinigung der oberen und unteren abgeschlossenen Halbsphären H_+, H_-. Da sie isometrisch sind, haben die gleiche Fläche. Sie schneiden sich im Einheitskreis $\mathbb{S}^1$ in $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$, einer Menge von endlichem $\mathcal{H}^1$-Maß, also einer $\mathcal{H}^2$-Nullmenge. Es folgt

$$\mathcal{H}^2(\mathbb{S}^2) = 2 \cdot \mathcal{H}^2(H_+ \setminus \mathbb{S}^1)\,.$$

Sei $M = H_+ \setminus \mathbb{S}^1$ also die offene ober Hemisphäre. M ist also die Menge der Punkte (x, y, z) mit $z > 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Betrachte die Projektion $P : M \to \mathbb{R}^2$ auf die ersten zwei Koordinaten. Wir sehen, dass P injektiv ist, als Bild den Einheitsball $B_1(0) \in \mathbb{R}^2$ hat und die Umkehrung $\Phi : B_1(0) \to M$ ist gegeben durch $\Phi(x, y) = (x, y, h(x, y))$ mit $h(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2})$. Wir berechen

$$||\nabla h(x, y)||^2 = \frac{x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}\,.$$

Mit Folgerung 17.3 berechnen wir unter Benutzung der Polarkoordinaten

$$\mathcal{H}^2(M) = \int_{B_1(0)} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\, dxdy = 2\pi \cdot \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}}\, dr$$

Die Stammfunktion von $r/\sqrt{1-r^2}$ ist $-\sqrt{1-r^2}$, also hat das Integral auf der rechten Seite den Wert 1.

Folglich gilt $\mathcal{H}^2(M) = 2\pi$ und $\mathcal{H}^2(\mathbb{S}^2) = 4\pi$. $\square$

18. (10.12)

18.1. **Beweis der Flächenformel.** Die Diskussion der Messbarkeit der Komposition $f \circ \Phi : U \to \mathbb{R}$ lassen wir aus (in dem wichtigsten Fall, dass f eine Borelfuntkion ist, ist die Aussage klar, da Φ eine Borelfunktion ist).

Wie im Beweis der Sätze von Fubini und Tonelli (und wie im Beweis der Transformationsformel) reduziert den Beweis von (16.1) auf den Beweis von (16.2), indem man die Linearität der Integrale und die Sätze über die monotone Konvergenz benutzt.

Wir betrachten die Menge $W \subset U$ von allen Punkten $x \in U$, in denen $D\Phi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ injektiv ist. Wie wir vorher gesehen haben, ist es genau die Menge der Punkte $x \in U$, in denen der in der Flächenformel (16.1) erscheinende Faktor $\sqrt{\det(D\Phi(x)^t \circ D\Phi(x))}$ ungleich 0 ist. Also ist die Menge W offen in U.

Zerlegt wir A in die disjunkte Vereinigung $A = (A \cap W) \cap (A \setminus W)$ und schöpft man ferner die beiden so entstehenden Teile von A durch kompakte Mengen und Nullmengen aus, so reduziert man die Aussage auf die folgenden beiden Lemmata:

Lemma 18.1. *Die Formel (16.2) gilt unter der Annahme, dass K kompakt und $D\Phi(x)$ injektiv in jedem Punkt x von K ist.*

Das zweite Lemma gilt, wie aus seinem Beweis folgt, sogar ohne die Annahme, dass Φ injektiv ist.

Lemma 18.2. *Ist $K \subset U$ kompakt und das Differential $D\Phi(x)$ in jedem Punkt $x \in K$ sei nicht injektiv. Dann gilt $\mathcal{H}^n(\Phi(K)) = 0$.*

Der Beweis von Lemma 18.1 ist wortgelich mit dem Beweis von Satz 16.1, mit dem einzigen Unterschied, dass wir die lineare Transformationsformel Satz 16.2 statt Satz 6.3 benutzen.

Den Beweis von Lemma 18.2 führen wir auf Lemma 18.1 zurück. Und zwar ebtrahcten wir für jedes $\epsilon > 0$ die Abbildung $\Phi_\epsilon : U \to \mathbb{R}^{k+n} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ gegeben durch $\Phi_\epsilon(x) := (\Phi(x), \epsilon \cdot x)$.

Dien orthogonale Projektion $P : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ist 1-Lipschitz und $\Phi = P \circ \Phi_\epsilon$ für alle ϵ. Also ist $\mathcal{H}^n(\Phi(K)) \leq \mathcal{H}^n(\Phi_\epsilon(K)$.

Nun ist das Differential von Φ_ϵ in allen Punkten $x \in U$ injektiv, also kann $\mathcal{H}^n(\Phi_\epsilon(K))$ mit der Formel (16.2) berechnet werden.

Aus Stetigkeitsgründen finden wir für jedes $\delta > 0$ eine $\epsilon > 0$, so dass für alle $x \in K$ und alle gilt

$$|\det(D\Phi_\epsilon^t(x) \circ D\Phi_\epsilon(x))| < \delta .$$

Daraus folgern wir

$$\mathcal{H}^n(\Phi(K)) \leq \sqrt{\delta} \cdot \lambda_n(K) .$$

Da δ beliebig klein gewählt werden kann, beendet es den Beweis von Lemma 17.2 und Satz 16.3.

18.2. **Mittelwert.** Wir fhren folgende Bezeichnugn und Definition ein.

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $A \in \mathcal{A}$ beliebig mit $0 < \mu(A) < \infty$. Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann ist der Mittelwert von f über die Menge A (bezüglich des Maßes μ) gegeben durch

$$⨍_A f = ⨍_A f \; d\mu := \frac{1}{\mu(A)} \cdot \int_A f \; d\mu .$$

Für das Zählmaß μ ist der Mittelwert das übliche arithmetische Mittel.

Das Prinzip von Cavalieri läßt sich mit Hilfe des Mittelwerts wie folgt deuten (im Spezialfall $n = 3$):

Sei A eine eine messbare Teilmenge von $[a, b] \times \mathbb{R}^2$. Dann ist das Volumen von A gleich dem Produkt der Höhe $(b-a)$ und dem λ_1-Mittelwert über das Interval $[a, b]$ der $\mathcal{H}^2$-Maße der Schnittflächen $V_t, t \in [a, b]$, wobei V_t die Menge der Punkte aus V mit der letzten Koordinate t bezeichnet.

18.3. **Rotationskörper I.** Sei $A \subset \mathbb{R}^3$ eine Borelteilmenge, die in der xz-Ebene enthalten ist und so dass für jeden Punkt $(r, 0, z) \in A$ die Ungleichheit $r \geq 0$ gilt. Der durch A um die Rotation um die z-Achse definierte Rotationskörper ist die Menge

$$V = \{(r \cos \phi, r \sin \phi, z); (r, 0, z) \in A\} .$$

Ist A die Menge der Punkte $\{(r, 0, z) | a \leq z \leq b; 0 \leq r \leq f(z)\}$ so erhält man durch die Anwednung des Satzes von Tonelli die Formel:

$$\lambda_3(V) = \int_a^b \pi \cdot f^2(z) \, dz ,$$

die wir auch schreiben können als

$$\lambda_3(V) = (b - a) \cdot \pi \cdot ⨍_{[a,b]} f^2(z) \; dz$$

.

Um das Volumen allgemeiner Rotationskörper zu bestimmen, betrachten wir die Transformation $\Phi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(r, \phi, z) = (r \cdot \cos\phi, r \cdot \sin\phi, z) \,.$$

Dann gilt $|\det D\Phi(r, \phi, z)| = r$.

19. (13.12)

19.1. **Rotationskörper II.** Mit Hilfe der Transfromation Φ können wir das Volumen des Rotationskörpers V, der durch die Menge A bestimmt ist wie folgt berechnen.

$$\lambda_3(V) = \int_A \int_{(0,2\pi)} r \, d\phi \, dr \, dz = 2\pi \cdot \int_A r \, dr \, dz = 2\pi \cdot \lambda_2(A) \cdot ⨍_A r \, d\lambda_2(r, z) \,.$$

Die Funktion $r : A \to \mathbb{R}$ beschreibt den Abstand eines Punkts $P \in A$ zur z-Achse. Damit ist der letze Faktor in der obigen Formel der mittlere Abstand von A zur z-Achse. (Diese Formel nennt man die *zweite Guldinsche Regel*).

Zum Beispiel erhält man für den *Rotationstorus* $T_{R,s}$ der durch die Rotation um die z-Achse eines Kreises B mit Radius s in der xz Ebene

$$\lambda_3(T_{R,s}) = 2\pi \cdot (\pi \cdot s^2) \cdot R \,,$$

wobei R den Abstand des Zentrum von B von der z-Achse bedeutet. Hierbei benutzen wir die Aussage, dass der mittlere Abstand der Punkte eines Kreises B zur Gerade in derselben Ebene genau der Abstand des Zentrums zu der Geraden ist. Man kann es nachrechnen, wir werden es etwas später aus allgemeinen Symmetriegründen schließen.

19.2. **Rotationsflächen.** Sei die Menge A in der xz Ebene das Bild einer injektiven $\mathcal{C}^1$-Kurve $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$, wobei wir $\gamma(t) = (r(t), 0, z(t))$ schreiben. Sei M durch die Rotation von A um die z-Achse entstehende Menge. Dann können wir M, bis auf eine $\mathcal{H}^2$-Nullmenge als Bild der folgenden injektiven Abbildung $\Psi : (0, 2\pi) \times (a, b) \to \mathbb{R}^3$ beschreiben:

$$\Psi(\phi, t) = (r(t) \cdot \cos(\phi), r(t) \cdot \sin\phi, z(t)) \,.$$

Wir berechnen

$$\sqrt{\det D\Psi^t(\phi, t) \cdot D\Psi(\phi, t)} = r \cdot ||\gamma'(t)|| \,.$$

es folgt

$$\mathcal{H}^2(M) = 2\pi \cdot \int_a^b r \cdot ||\gamma'(t)|| dt = 2\pi \cdot \int_\gamma r(s) \, d\mathcal{H}^1(s) \,.$$

Wieder können wir das als ein Produkt der Länge und des mittleren Abstandes ausdrücken:

$$\mathcal{H}^2(M) = 2\pi \cdot \ell(\gamma) \cdot \fint_A r(s)\, d\mathcal{H}^1(s)$$

Dies nennt man die *erste Guldinsche Regel.* Für den Rand M des Rotationstorus $T_{R,s}$ erhält man

$$\mathcal{H}^2(M) = 2\pi \cdot 2\pi s \cdot R\ .$$

19.3. **Schwerpunkt.** Folgender Satz beschreibt die geometrische Bedeutung der Schwerpunkte

SATZ 19.1. *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Borelmenge von positivem Maß. Betrachte die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(y) = \int_K ||x-y||^2\ dx$. Dann nimmt die Funktion g ihr eindeutiges Minimum im Punkt $M \in \mathbb{R}^n$, dem Schwerpunkt von K, mit Koordinaten*

$$m_i = \frac{1}{\lambda_n(K)} \int_K x_i = \fint_K x_i\ .$$

Beweis. Es gilt

$$g(y) = \int_K ||x||^2 - 2 \int_K < x, y >\ dx + \int_K ||y||^2\, dy\ .$$

Der erste Summand hängt nicht von y ab, der zweite ist gleich

$$-2 \cdot \lambda_n(K) \cdot < M, y >,$$

der dritte Summand ist $\lambda_n(K) \cdot ||y||^2$. Die Aussage ergibt sich durch quadratische Ergänzung. $\square$

In der ersten Guldinschen Regel erscheint als als letzter Faktor die erste Koordinate des Schwerpunkts von A (in der xz-Ebene).

Aus der Invarianz des Lebesgue-Maßes unter Isometrien und dem obigen Satz (der den Schwerpunkt nur mit Hilfe des Lebegsue-Maßes und den Abständen beschreibt) folgt:

Lemma 19.2. *Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ wie oben und $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie, so sendet L den Schwerpunkt von K auf den Schwerpunkt von $L(K)$. Gitl insbesondere $L(K) = K$ so erhält L den Schwerpunktn von K.*

Als direkte Folgerungen erhalten wir aus Symmeteriegründen

Folgerung 19.3. *Der Schwerpunkt eines Balls im $\mathbb{R}^n$ ist das Zentrum des Balls. Der Schwerpunkt eines gleichseitigen Dreiecks in $\mathbb{R}^2$ ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.*

Genauso sieht man, dass der Schwerpunkt eines Parallelograms (Parallelotops) der Schnittpunkt der Diagonalen ist. Der Schwertpunkt eines regelmässigen Simplex im $\mathbb{R}^n$ mit Ecken $P_0, P_1, ..., P_n$ ist der Punkt $\frac{1}{n+1}P_0 + P_1 + ... + P_n$.

20. (17.12)

20.1. **Ana II, Wiederholung.** Gradient, Immersion, Submersion, [3, p. 110-111], [9].

20.2. **Untermannigfaltigkeiten.** Siehe [2, Kapitel 3.1] und [9]:

SATZ 20.1. *Sei X eine Teilmenge des $\mathbb{R}^k$, $n \geq 0$ und $l \geq 1$ ganze Zahlen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *Für alle $x \in X$ existiert eine Umgebung U von x in $\mathbb{R}^k$ und einen $\mathcal{C}^l$-Diffeomorphismus $\Phi_1 : U \to V \subset \mathbb{R}^k$, so dass $\Phi_1(X \cap U)$ gleich dem Durchschnitt von V mit einem affinen n-dimensionalen Teilraum ist.*
(2) *Für alle $x \in X$ existiert eine Umgebung U von x in $\mathbb{R}^k$, eine offene Menge V in $\mathbb{R}^n$ und eine injektive $\mathcal{C}^l$-Immersion $\Phi_2 : V \to U$, so dass $\Phi_2(V) = U \cap X$ gilt.*
(3) *Für alle $x \in X$ existiert eine Umgebung U von x in $\mathbb{R}^k$, eine Submersion $\Phi_3 : U \to \mathbb{R}^{k-n}$ und ein $y \in \mathbb{R}^{k-n}$ so dass $U \cap X = \Phi_3^{-1}(y)$ gilt.*

Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^k$, die die äquivalenten Aussagen erfüllt, heißt eine n-dimensionale $\mathcal{C}^l$-Untermannigfaltikeit von $\mathbb{R}^k$. Wir werden im folgenden nur $\mathcal{C}^1$-Untermannigfaltigkeiten benutzen und sie einfach "Untermannigflatigkeiten" oder "Mannigfaltigkeiten" oder n-Mannigfaltigkeiten nennen.

21. (20.12)

21.1. **Sphärische Dreiecke.** Für eine Skizze des Beweises des folgenden Satzes siehe [8]:

SATZ 21.1. *Sei Δ eine Dreieck auf der Einheitssphäre begrenzt Großkreisbögen, die sich in den Winkeln α, β, γ schneiden. Dann ist die Fläche des Dreiecks gegeben durch:*

$$\mathcal{H}^2(\Delta) = \alpha + \beta + \gamma - \pi \ .$$

21.2. **Konzentration des Maßes.** Folgende Aussage beweist man durch direkte Integration in Polarkoordinaten:

SATZ 21.2. *Für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $n_0 > 0$ so dass für jedes $n \geq n_0$ das $\mathcal{H}^n$-Maß der Einheitsphäre S^n im folgenden Sinne in der Nähe des Äquators S^{n-1} konzentriert ist. Für die ϵ-Umgebung B_ϵ von S^{n-1} in S^n gilt*

$$\mathcal{H}^n(B_\epsilon) \geq (1-\epsilon) \cdot \mathcal{H}^n(S^n) .$$

21.3. **Tubenformel.** Für die Idee des Beweises der folgenden Sätze verweise ich auf [2, p. 66-68].

SATZ 21.3. *Es gilt $\mathcal{H}^{n-1}(S^{n-1}) = n \cdot \sigma_n$.*

Der folgende Satz heißt die Tubenformel von Weyl.

SATZ 21.4. *Sei M eine kompakte n-dimensinale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$. Für $t > 0$ sei M_t die Tubenumgebung von Rasiu t um M, d.h. die Menge Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ mit $d(x, M) \leq t$. Dann gibt es ein $t_0 > 0$, so dass für all $0 < t < t_0$, die Funktion $f(t) = \lambda_n(M_t)$ ist ein Polynom der Form*

$$F(t) = t^{k-n} \cdot (a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + ... + a_n t^n) .$$

Der "erste" Koeffizient des Polynoms a_0 ist $\sigma_{k-n} \cdot \mathcal{H}^n(M)$.

22. (07.01)

22.1. **Untermannigfaltigkeiten.** Eine Referenz ist [2, Kapitel 3.1]

Sei M eine n-dimensionale $\mathcal{C}^1$-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$.

Eine *Karte* von M ist eine injektive Immersion $\Phi_2 : V \to \mathbb{R}^k$, für die V offen in $\mathbb{R}^n$ ist. Das Bild $\Phi_2(V) \subset M$ nennen wir ein *Kartengebiet* in M.

Nach der Bedingung (2) unter den 3 äquivalenten Bedingungen einer Untermannigfaltigkeit, ist jeder Punkt $x \in M$ in einem Kartengebiet enthalten. Eine Karte $\Phi_2 : V \to \Phi_2(V) \subset M$ ist immer ein Homomorphismus und $\Phi_2(V)$ ist offen in M.

Eine Familie von Karten heißt ein Atlas von M, wenn die entsprechenden Kartengebiete ganz M überdecken. Nach Definition hat jede Mannigfaltigkeit einen Atlas. Man kann (indem man beliebige offen Teilmengen durch offene rationale Quader ersetzt) M durch höchstens abzählbar viele Kartengebiete überdecken.

Aus der Definition folgt leicht, dass M in $\mathbb{R}^k$ "lokal abgeschlossen" ist, d.h. M ist der Durchschnitt einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^k$ und einer abgeschlossenen Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^k$.

Insbesondere ist M eine Borelteilmenge von $\mathbb{R}^k$. Für jede Teilmenge A von M, die einem Kartengebiet enthalten ist, können wir die entsprechende Karte und die Flächenformel benutzen, um das $\mathcal{H}^n(A)$ zu bestimmen.

Benutzt man die Flächenformel und eine Zerlegung einer Teilmenge von M in Teilmengen von Kartengebieten, ergibt sich:

Lemma 22.1. *Sei M eine n-dimensional Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$. Dann hat M Hausdorff-Dimension n. Ist $A \subset M$ offen in M, so gilt $\mathcal{H}^k(A) > 0$. Ist $A \subset M$ kompakt, so gilt $\mathcal{H}^k(A) < \infty$.*

22.2. **Tangentialraum.** [2, Kapitel 3.2].

23. (10.01)

23.1. **Tangentialraum einer Untermannigfaltigkeit.** [2, Kapitel 3.2].

Eine nicht in [2] enthaltene äquivalente Definition eines Tangentialvektors (und des Tangentialraums) ist die folgende. Mit ihrer Hilfe zeigt man am einachsten, dass "eckige Objekte" keine Untermannigfltigkeiten sind.

Lemma 23.1. *Sei M wie oben, $x \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^k$ ist Tangentialvaktor an M in x genau dann, wenn es eine $\mathcal{C}^1$-Kurve $\gamma : [0, \epsilon) \to \mathbb{R}^k$ gibt, deren Bild in M enthalten ist, und so dass $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = v$ gilt.*

Mit Hilfe der Tangentialräume kann man leicht Karten finden. In den Anwendungen ist die Abbildung g im nächsten Lemma häufig eine orthogonale Projektion.

Lemma 23.2. *Sei M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$. Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^k$ und $g : U \to \mathbb{R}^n$ sei $\mathcal{C}^1$.*

1) Ist $g : M \cap U$ injektiv und $Dg(x) : T_xM \to \mathbb{R}^n$ injektiv für alle $x \in M \cap U$, so ist $V := g(M \cap U)$ offen in $\mathbb{R}^n$ und $g^{-1} : V \to U \cap M$ eine Karte.

2) Ist für ein $y \in U \cap M$ die Ableitung $Dg(y) : T_yM \to \mathbb{R}^n$ injektiv, so ist sind die Bedingungen von (1) für eine kleinere Umgebung $U' \subset U$ von y erfüllt. D.h. die "Umkehrung" von g definiert eine Karte in einer Umgebung von y.

23.2. **Untermannigfaltigkeit mit Rand.** [2, Kapitel 4.2]

24. (14.01)

24.1. **Untermannigfaltigkeit mit Rand.** [2, Kapitel 4.2]

24.2. **Integralsatz von Gauß.** Vektorfelder, Divergenz, Formulierung des Integralsatzes, [2, Satz 4.3.6].

25. (17.01)

25.1. **Integralsatz von Gauß.** Anwendungen und Intepretation [2, Kapitel 4.3].

References

[1] Daniel Grieser *Kurzskript zur Maßtheorie.*
[2] Daniel Grieser *Analysis III*
[3] Daniel Grieser *Analysis II* https://www.staff.uni-oldenburg.de/daniel.grieser/wwwlehre/Eigene-kripten/grieser-analysis2-r907.pdf
[4] Guido Sweers. *Notizen zur Vorlesung Analysis III.*
[5] *Das Banach-Tarski-Paradoxon* https://de.wikipedia.org/wiki/Banach-Tarski-Paradoxon
[6] *Die Kochhurve* https://de.wikipedia.org/wiki/Koch-Kurve
[7] *Die Peanokurve* https://de.wikipedia.org/wiki/Peano-Kurve
[8] *Kugeldreiecke* https://de.wikipedia.org/wiki/Kugeldreieck
[9] *Immersion, Submersion, Untermannigfaltigkeiten* https://www.mi.uni-koeln.de:8929/UM2.pdf