KOMPAKTHEIT

1. Kompaktheit

Definition 1.1. Ein metrischer X Raum heißt total beschränkt, wenn für jedes $\epsilon > 0$ man X durch eine endliche Anzahl von offenen Bällen mit Radius ϵ überdecken kann.

Ein Raum ist nicht total beschränkt genau dann, wenn es ein $\epsilon > 0$ und eine Folge (x_n) in X gibt, so dass $d(x_i, x_j) > \epsilon$ für alle $i \neq j$ gilt. Jeder total beschränkte Raum ist beschränkt, aber die Umkehrung gilt nicht. Ein Gegenbeispiel ist ein Ball im Raum der stetigen Funktionen auf einem Interval (bezüglich der Supremumsnorm).

Jeder Teilraum eines totalbeschränkten Raums ist total beschränkt.

SATZ 1.1. *Ein metrischer Raum X ist folgenkompakt genau dann, wenn er total beschränkt und vollständig ist.*

Beweis. Jede Cauchyfolge, die eine konvergente Teilfolge besitzt ist konvergent (Ana I). Also ist jeder kompakte Raum vollständig. Wäre er nicht total beschränkt, so gäbe es eine Folge (x_n), deren Gleider paarweise Abstand mindestens ϵ hätten. Keine Teilfolge dieser Folge wäre eine Cauchyfolge, könnte also nicht konvergent sein.

Sei nun X vollständig und total beschränkt. Sei (x_n) eine Folge in X. Überdecke X durch endlich viele Bälle von Radius 1. Einer dieser Bälle, den wir als C_1 bezeichnen, enthält x_n für unendlich viele n.

Überdecke C_1 durch endlich viele Bälle (in C_1) von Radius $\frac{1}{2}$. Einer dieser Bälle, C_2, enthält unendlich viele Folgenglieder der Folge (x_n). Gehe induktiv vor und finde für alle $k = 3, 4, ...$ eine Teilmenge C_k von C_{k-1} die unendlich viele Folgenglieder enthält und ein Ball mit Radius $\frac{1}{2^k}$ in C_{k-1} ist.

Wähle nun ein $y_1 = x_{i_1} \in C_1$, ein $y_2 = x_{i_2} \in C_2$, mit $i_2 > i_1$ und so weiter. Die Folge (y_k) ist eine Teilfolge von (x_n) und es gilt $y_k \in C_k$ für alle k. Wir haben $C_k \subset C_{k-1} \subset ... \subset C_1$. Wegen der Definition von C_k und der Deieckungleichung haben je zwei Punkte aus C_k Abstand höchstens $2 \cdot \frac{1}{2^k}$. Also ist (y_k) eine Cauchyfolge. Wegen der Vollständigkeit besitzt sie eine konvergente Teilfolge. □

SATZ 1.2. (**Lebesgue-Lemma**). *Sei K folgenkompakt, sei $U_i, i \in I$ eine offene Überdeckung von K. Dann gibt es ein $r > 0$, so dass für alle $x \in K$ der Ball $B_r(x)$ in einer der Mengen U_i enthalten ist.*

Beweis. Nehme das Gegenteil an. Dann gibt es eine Folge x_n in K, so dass für alle n der Ball $B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ in keiner der offenen Mengen U_i aus der Familie enthalten ist. Finde eine gegen einen Punkt x konvergente Teilfolge der Folge (x_n). Wähle ein $i \in I$, so dass $x \in U_i$ gilt. Da U_i offen ist, finde ein $r > 0$, so dass $B_r(x) \in U$.

Finde n, so dass $d(x_n, x) < \frac{r}{3}$ und $\frac{1}{n} < \frac{r}{3}$. Dies ist möglich, weil (x_n) eine gegen x konvergente Teilfolge besitzt. Dann gilt $B_{\frac{1}{n}}(x_n) \subset B_r(x) \subset U_i$ im Widerspruch zu den Eigenschaften der Punkte x_n. □

SATZ 1.3. *Ein Raum ist folgenkompakt genau dann wenn er kompakt (bzgl. der Überdeckungsdefinition) ist.*

Beweis. Sei X kompakt. Sei (x_n) eine Folge. Angenommen, x_n habe keine konvergente Teilfolge. Dann gibt es für alle $y \in X$ einen offenen Ball U_y um y, der nur endlich viele Elemente der Folge (x_n) enthält. Die offenen Menge U_y überdecken X. Also gibt es eine endliche Anzahl $U_{y_1}, ..., U_{y_k}$ die immer noch X überdecken. Aber dann enthält $X = U_{y_1} \cup U_{y_2} \cup ... \cup U_{y_k}$ nur endlich viele Elemente der Folge (x_n), was unmöglich ist.

Sei nun X folgenkompakt. Sei $U_i, i \in I$ eine Familie offener Menge, die X überdeckt. Nach dem Lebesgue-Lemma gibt es ein $r > 0$, so dass jeder Ball $B_r(x)$ mit Radius r in einer der Mengen U_i enthalten ist.

Finde endlich viele Punkte $x_1, ..., x_n$, so dass die Bälle $B_r(x_1), B_r(x_2), ..., B_r(x_n)$ den Raum X überdecken. Dies ist wegen der totalen Beschränktheit von X möglich. Wähle $U_1, ..., U_n$, die die jeweiligen Bälle $B_r(x_i)$ enthalten. Dann ist $U_1, ..., U_n$ die gesuchte endlich Teilüberdeckung. □