Universität zu Köln SS 2019
Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. A. Drewitz
Assistenten: A. Prévost, L. Schmitz

Abgabe: keine

0. Übung Wahrscheinlichkeitstheorie I

(zur Besprechung in der zweiten Vorlesungswoche)

Am 10.04.2019 findet die Übung von Gruppe 2 von 12:00 Uhr bis 13:30 Uhr anstelle von 14:00 Uhr bis 15:30 Uhr im Hörsaal MI statt.

Aufgabe 0.1

Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $[0,1)$, sodass $x \sim y$ genau dann gilt, wenn $x-y \in \mathbb{Q}$. Durch das Auswahlaxiom kann man zeigen, dass eine Menge $V \subset [0,1)$ existiert, die genau einen Repräsentanten jeder Äquivalenzklasse enthält, das heißt

- für jedes $x \in [0,1)$ existiert $y \in V$ mit $x \sim y$,
- für alle $x \neq y \in V$ gilt $x \nsim y$.

a) Zeigen Sie, dass
$$[0,1) \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)} (V+r) \subset [-1,2).$$

b) Zeigen Sie, dass für alle $r \neq r' \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)$, $(V+r) \cap (V+r') = \emptyset$.

c) Zeigen Sie, dass keine Funktion $\mu : 2^{\mathbb{R}} \to [0,\infty]$ existiert, sodass

   - für jede Familie $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$ paarweiser disjunkter Mengen gilt
   $$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i),$$
   - für alle $x \in \mathbb{R}$ und $A \subset \mathbb{R}$ gilt $\mu(A+x) = \mu(A)$,
   - $\mu([0,1)) = 1$ gilt.

Bonusaufgaben

Die zwei nächsten Aufgaben benötigen die Vorlesung „Einführung in die Stochastik“ und sind daher nicht klausurrelevant. Sie sollen die Problematik der Definition eines Erwartungswertes bzw. einer Wahrscheinlichkeit veranschaulichen, welche in der der Vorlesung vorangegangenen „Einführung in die Stochastik“ bzw. in der Schule verwendet wurden.

Aufgabe 0.2

In der Vorlesung „Einführung in die Stochastik“ wurde der Erwartungswert ausschließlich für diskrete Zufallsvariablen bzw. Zufallsvariablen mit Dichte definiert. Durch eine allgemeinere Definition des Integrals in dieser Vorlesung werden wir dieses Problem lösen.

a) Zeigen Sie, dass wenn X und Y diskrete Zufallsvariablen sind, dann sind $X+Y$ bzw. XY auch diskrete Zufallsvariablen.

b) Es sei Z eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } t < 0, \\ \frac{1+t}{2}, & \text{wenn } t \in [0,1], \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Was ist $\mathbb{E}[Z]$?

c) Zeigen Sie, dass Zufallsvariablen X und Y mit einer Dichte existieren, sodass $X+Y$ bzw. XY keine Dichte besitzen und nicht diskret sind. Wie interpretieren Sie dieses Ergebnis im Bezug auf die Anwendbarkeit der Minkowski bzw. Hölder-Ungleichung?

Aufgabe 0.3

Die folgende Aufgabe soll Sie ein wenig verwirren. Sie sollen ferner dadurch besser verstehen, warum es wichtig ist, eine passende Definition eines Wahrscheinlichkeitsraums zu haben: Ein Freund von Ihnen wirft für Sie verdeckt zwei faire und unabhängige Münzen und sagt Ihnen anschließend wahrheitsgemäß, dass eine der beiden Münzen “Kopf“ zeigt.

a) Angenommen, Sie wissen, dass Ihr Freund nur eine Münze gesehen hat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die andere Münze auch “Kopf“ zeigt?

b) Angenommen, Sie wissen, dass Ihr Freund beide Münze gesehen hat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die andere Münze auch “Kopf“ zeigt?

c) Eine ähnliche Frage wurde in Twitter an ca. 2000 Nutzer gestellt. Wir können daher schätzen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die andere Münze auch “Kopf“ zeigt, 0,42 ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ihr Freund beide Münzen gesehen hat?

d) Wenn die andere Münze auch “Kopf“ zeigt, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ihr Freund beide Münzen gesehen hat?

e) Sie sehen einen Mann auf der Straße mit nur einem Kind. Er sagt, dass er insgesamt 2 Kinder hat, und dass das abwesende Kind ein Junge ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das andere Kind ein Junge ist? Wir nehmen hier an, dass der Anteil von Mädchen und Jungen annähernd gleich ist.