

Abgabe: Bis 11.04., 18 Uhr, in den Kästen in Raum 301 des Mathematischen Institutes

1. Übung Wahrscheinlichkeitstheorie I

(Halbring, Ring, Algebra)



Aufgabe 1.1

(10 Punkte)

Es sei Ω eine nicht-leere Menge.

- a) Es sei $\mathcal{S}$ ein π -System. Zeigen Sie, dass für alle $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}$ gilt:

$$\bigcap_{i=1}^n S_i \in \mathcal{S}.$$

(1 Punkt)

- b) Es sei

$$\mathcal{I} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{I}$ ein Halbring auf $\mathbb{R}$ ist.

(2 Punkte)

- c) Es sei

$$\mathcal{I}' = \{\{n, \dots, n+m\} : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\emptyset\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{I}'$ ein Halbring auf $\mathbb{Z}$ ist. Was ist der durch $\mathcal{I}'$ erzeugte Ring?
(3 Punkte)

- d) Es sei $\mathcal{R}$ ein Ring auf einem endlichen Raum Ω . Zeigen Sie, dass $\mathcal{R}$ eine Algebra auf $\bigcup_{A \in \mathcal{R}} A$ ist.
(2 Punkte)

- e) Finden Sie zwei Ringe $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ auf $\{1, 2\}$, sodass

$$\mathcal{R}_1 * \mathcal{R}_2 := \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{R}_1, A_2 \in \mathcal{R}_2\}$$

kein Ring auf $\{1, 2\}^2$ ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 1.2

(10 Punkte)

Es sei Ω eine nicht-leere Menge und $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset 2^\Omega$. Wir sagen, dass ein Halbring (bzw. eine Algebra) $\mathcal{S}$ auf Ω der (bzw. die) durch $\mathcal{E}$ erzeugte Halbring (bzw. Algebra) ist, wenn $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$ und für alle Halbringe (bzw. Algebren) $\mathcal{S}'$ auf Ω mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}'$ gilt: $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$.

a) Finden Sie zwei Halbringe $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ auf $\{1, 2, 3\}$, sodass $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ kein Halbring ist. (2 Punkte)

b) Finden Sie $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset 2^{\{1,2,3\}}$, sodass kein durch $\mathcal{E}$ erzeugter Halbring existiert. (3 Punkte)

c) Wir definieren

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &:= \mathcal{E} \cup \{A^c : A \in \mathcal{E}\}, \\ \mathcal{E}_2 &:= \left\{ \bigcap_{i=1}^n B_i : n \in \mathbb{N}, B_i \in \mathcal{E}_1, i = 1, \dots, n \right\}, \\ \mathcal{E}_3 &:= \left\{ \bigcup_{j=1}^m C_j : m \in \mathbb{N}, C_j \in \mathcal{E}_2, j = 1, \dots, m \right\}.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{E}_3$ die von $\mathcal{E}$ erzeugte Algebra ist. (5 Punkte)

Aufgabe 1.3

(10 Punkte)

Es sei Ω eine nicht-leere Menge. Die Definition eines kommutativen Ringes und einer Algebra über einem Körper sind vor Lemma 1.1.17 im Skript gegeben.

a) Wir statten die Potenzmenge 2^Ω mit den Operationen Δ (symmetrische Differenz) als Addition und $\cap$ als Multiplikation aus. Zeigen Sie, dass dann $(2^\Omega, \Delta, \cap)$ ein kommutativer und unitärer Ring mit Nullelement $\emptyset$ und Einselement Ω ist. Sie dürfen durch Venn-Diagramme die Aussagen über Mengenoperationen zeigen. (4 Punkte)

b) Ein nicht-leeres Mengensystem $\mathcal{R} \subset 2^\Omega$ ist ein Ring im Sinne von Definition 1.1.7 genau dann, wenn $(\mathcal{R}, \Delta, \cap)$ ein kommutativer Ring ist. (3 Punkte)

c) Es sei $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ ein Ring oder eine Algebra im Sinne von Definition 1.1.7 bzw. Definition 1.1.12. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{A}, \Delta, \cap)$ eine Algebra über dem Körper $\{0, 1\}$ ist, wobei $0 \cdot A := \emptyset$ und $1 \cdot A := A$ für alle $A \in \mathcal{A}$. (3 Punkte)

Anmerkung: Sollten Sie für die Bearbeitung der Aufgaben mehrere Blätter benötigen, so sind diese zusammenzuheften. Bitte beschriften Sie Ihre Lösungen in der ersten Zeile in der folgenden Reihenfolge: **Gruppennummer in Rot**, Vorname, Name, Matrikelnummer, Blattnummer!