Universität zu Köln SS 2019
Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. A. Drewitz
Assistenten: A. Prévost, L. Schmitz

Abgabe: Bis 18.04., 18 Uhr, in den Kästen in Raum 301 des Mathematischen Institutes

2. Übung Wahrscheinlichkeitstheorie I

(Dynkin-System, σ-Algebra, π-λ-Theorem, Mengenfunktionen)

Blatt 1: Korrigierte Aufgabe: 1.2
Vorzurechnende Aufgabe: 1.1

Aufgabe 2.1 (10 Punkte)

Es sei $\{\varnothing\} \subset \mathcal{E} \subset 2^{\Omega}$. Wir definieren

$$\mathcal{E}_1 := \mathcal{E} \cup \{A^c : A \in \mathcal{E}\},$$
$$\mathcal{E}_2 := \left\{\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i : \ B_i \in \mathcal{E}_1, i \in \mathbb{N}\right\},$$
$$\mathcal{E}_3 := \left\{\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j : \ C_j \in \mathcal{E}_2, j \in \mathbb{N}\right\}.$$

Für die ersten drei Fragen betrachten wir $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{E} = \{(-\infty, a] : \ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing\}$.

a) Zeigen Sie, dass für alle $\varnothing \neq C \in \mathcal{E}_2$ entweder $a, b \in \mathbb{R}$ existieren mit $a < b$ und $[a, b] \subset C$, oder $C = \{a\}$ für ein $a \in \mathbb{R}$. (3 Punkte)

b) Zeigen Sie $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \notin \mathcal{E}_3$. (3 Punkte)

c) Zeigen Sie $\mathcal{E}_3 \neq \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. (2 Punkte)

d) Es sei $\Omega = \mathbb{Z}$ und $\mathcal{E} = \{\{n, n+1, \dots\} : \ n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\varnothing\}$. Zeigen Sie $\mathcal{E}_3 = \sigma(\mathcal{E}) = 2^{\mathbb{Z}}$. (2 Punkte)

Aufgabe 2.2 (10 Punkte)

Es seien $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf Ω, $\mu : \mathcal{F} \to [0, 1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß und $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ zwei π-Systeme mit

$$\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B) \text{ für alle } A \in \mathcal{A} \text{ und } B \in \mathcal{B}.$$

a) Zeigen Sie, dass für alle $S_1, S_2 \in \mathcal{F}$ gilt

$$\mu(S_1^c \cap S_2) = \mu(S_2) - \mu(S_1 \cap S_2).$$

(1 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass

$$D(\mathcal{A}) := \{A \in \sigma(\mathcal{A}) : \ \mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B) \text{ für alle } B \in \mathcal{B}\}$$

ein Dynkin-System ist. (3 Punkte)

c) Zeigen Sie $D(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$. (2 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass für alle $A \in \sigma(\mathcal{A})$ und $B \in \sigma(\mathcal{B})$ gilt:

$$\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2.3 (10 Punkte)

Es sei μ ein Inhalt auf einem Halbring $\mathcal{S}$ und $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{S})$ sei der von $\mathcal{S}$ erzeugte Ring.

a) Es seien $A, B_1 \ldots, B_n \in \mathcal{S}$. Zeigen Sie, dass paarweise disjunkte Mengen $C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{S}$ existieren, sodass

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \dot{\bigcup}_{j=1}^{m} C_j.$$

(1 Punkt)

b) Zeigen Sie

$$\mathcal{R} = \left\{ \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i : \ A_i \in \mathcal{S}, i = 1, \ldots, n, \text{ und paarweise disjunkt} \right\}$$

(Verallgemeinerung von Beispiel 1.1.11). (3 Punkte)

c) Wir definieren $\nu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$,

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i), \quad A = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{R}.$$

Zeigen Sie, dass ν wohldefiniert ist, d.h. der Wert $\nu(A)$ nicht von der Darstellung von A abhängt. (1 Punkt)

d) Zeigen Sie, dass ν ein Inhalt auf $\mathcal{R}$ ist, und dass ν die eindeutige Fortsetzung von μ zu einem Inhalt auf $\mathcal{R}$ ist. (2 Punkte)

e) ν ist genau dann ein Prämaß, wenn μ ein Prämaß ist. (3 Punkte)

Bemerkung zu d): ν' heißt „Fortsetzung“ von μ auf $\mathcal{R}$, wenn $\nu' : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ein Inhalt ist mit $\nu'(B) = \mu(B)$ für alle $B \in \mathcal{S}$.

Anmerkung: Sollten Sie für die Bearbeitung der Aufgaben mehrere Blätter benötigen, so sind diese zusammenzuheften. Bitte beschriften Sie Ihre Lösungen in der ersten Zeile in der folgenden Reihenfolge: **Gruppenummer in Rot**, Vorname, Name, Matrikelnummer, Blattnummer!