

Abgabe: Bis 25.04., 18 Uhr, in den Kästen in Raum 301 des Mathematischen Institutes

3. Übung Wahrscheinlichkeitstheorie I

(Stetigkeit von oben bzw. unten, Eigenschaften von Inhalten)

Blatt 2: Korrigierte Aufgabe: 2.1
Vorzurechnende Aufgabe: 2.2

Aufgabe 3.1

(10 Punkte)

Es seien $\mathcal{I} := \{(a, b] \cap \mathbb{Q} : a \leq b, a, b \in \mathbb{Q}\}$ und $\mathcal{A}$ die Algebra auf $\mathbb{Q}$, die von $\mathcal{I}$ erzeugt wird. Es seien $\nu : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty)$, $\nu((a, b] \cap \mathbb{Q}) := b - a$ und $\mu : 2^{\mathbb{Q}} \rightarrow [0, \infty]$ das Zählmaß auf $\mathbb{Q}$.

- a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{I}$ ein Halbring und ν ein von unten und von oben stetiger Inhalt auf $\mathcal{I}$ ist.

(2 Punkte)

- b) Es sei $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein Abzählung von $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ und $U_n := (q_n - 2^{-(n+1)}, q_n] \cap (0, 1] \cap \mathbb{Q} \in \mathcal{I}$. Zeigen Sie mithilfe von Aufgabe 2.3 a), dass es paarweise disjunkte Mengen $W_{n,k} \in \mathcal{I}$, $n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, m_n$, (d.h. $W_{n,k} \cap W_{n',k'} = \emptyset$, $(n, k) \neq (n', k')$) gibt, sodass $W_{n,k} \subset U_n$ gilt und für alle $p \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{n=1}^p U_n = \bigcup_{n=1}^p \bigcup_{k=1}^{m_n} W_{n,k}. \quad (1 \text{ Punkt})$$

- c) Zeigen Sie mit b), dass ν nicht σ -additiv auf $\mathcal{I}$ ist.

(2 Punkte)

- d) Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{A})$ die Potenzmenge von $\mathbb{Q}$ ist.

(1 Punkt)

- e) Zeigen Sie, dass $\mu(A) = \infty$ für alle $\emptyset \neq A \in \mathcal{A}$.

(2 Punkte)

- f) Zeigen Sie, dass μ σ -endlich auf $\sigma(\mathcal{A})$ ist, aber nicht auf $\mathcal{A}$, und dass es ein weiteres Maß $\mu' : 2^{\mathbb{Q}} \rightarrow [0, \infty]$ gibt, sodass $\mu = \mu'$ auf $\mathcal{A}$, aber $\mu \neq \mu'$ auf $\sigma(\mathcal{A})$.

(2 Punkte)

Aufgabe 3.2

(10 Punkte)

Es sei $\mathcal{I} := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, -\infty < a \leq b < \infty\}$ die Menge der halboffenen Intervalle in $\mathbb{R}$. Es seien $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ eine rechtsstetige, nicht fallende Funktion und $\mu : \mathcal{I} \rightarrow [0, 1]$ definiert durch

$$\mu((a, b]) = F(b) - F(a).$$

Es sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{I}^{\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{I}$ mit $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = (a, b] \in \mathcal{I}$ und für jedes $i \in \mathbb{N}$ seien $a_i \leq b_i$, sodass $A_i = (a_i, b_i]$ gilt.

- a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$F(b) - F(a) \geq \sum_{i=1}^{\infty} (F(b_i) - F(a_i)). \quad (2 \text{ Punkte})$$

- b) Zeigen Sie, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ endlich viele verschiedene $\bar{b}_{n_1}, \dots, \bar{b}_{n_k} \in \mathbb{R}$ gibt mit $\bar{b}_{n_i} > b_{n_i}$ für alle $i = 1, \dots, k$, $F(\bar{b}_{n_i}) - F(b_{n_i}) < \varepsilon 2^{-n_i}$ und

$$[a + \varepsilon, b] \subset (a_{n_1}, \bar{b}_{n_1}) \cup \dots \cup (a_{n_k}, \bar{b}_{n_k}).$$

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Heine-Borel. (3 Punkte)

- c) Zeigen Sie, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ endlich viele Intervalle $(a_{n_1}, b_{n_1}], \dots, (a_{n_k}, b_{n_k}]$ gibt mit

$$F(b) - F(a + \varepsilon) \leq \sum_{i=1}^k (F(b_{n_i}) - F(a_{n_i}) + \varepsilon 2^{-n_i}).$$

(2 Punkte)

- d) Zeigen Sie, dass μ ein Prämaß auf $\mathcal{I}$ ist. (3 Punkte)

Aufgabe 3.3

(10 Punkte)

Es seien Ω eine unendliche Menge, $\mathcal{R} = \{A \in 2^\Omega : |A| < \infty\}$ und für alle $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ sei $\mu_f : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ definiert durch

$$\mu_f(A) = \sum_{\omega \in A} f(\omega) \text{ für alle } A \in \mathcal{R}.$$

- a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{R}$ ein Ring auf Ω ist. (1 Punkt)

- b) Zeigen Sie, dass μ genau dann ein Inhalt auf $\mathcal{R}$ ist, wenn $\mu = \mu_f$ für ein $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$, und dass jeder Inhalt auf $\mathcal{R}$ σ -additiv ist. (2 Punkte)

- c) Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{R}) = \{A \in 2^\Omega : A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}$ gilt, und dass für alle $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ die Funktion $\tilde{\mu}_f : \sigma(\mathcal{R}) \rightarrow [0, \infty]$ definiert durch

$$\tilde{\mu}_f(A) = \begin{cases} \sum_{\omega \in A} f(\omega), & A \text{ ist abzählbar,} \\ \infty, & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Fortsetzung von μ_f zu einem Inhalt auf $\sigma(\mathcal{R})$ ist, der σ -additiv ist. (3 Punkte)

- d) Zeigen Sie, dass für alle $f : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ das Maß $\tilde{\mu}_f$ genau dann σ -endlich ist, wenn Ω abzählbar ist, und dass $\tilde{\mu}_f$ dann die eindeutige Fortsetzung von μ_f zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ ist. Wenn Ω nicht abzählbar ist, finden Sie $f : \Omega \rightarrow [0, \infty)$, sodass eine andere Fortsetzung von μ_f zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ existiert. (2 Punkte)

- e) Zeigen Sie, dass $\hat{\mu} : \sigma(\mathcal{R}) \rightarrow [0, \infty]$, definiert durch

$$\hat{\mu}(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ ist endlich,} \\ \infty, & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine andere Fortsetzung von μ_0 zu einem Inhalt auf $\sigma(\mathcal{R})$ ist, der stetig von oben ist, aber nicht σ -additiv, wobei $0(\omega) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$. (2 Punkte)

Anmerkung: Sollten Sie für die Bearbeitung der Aufgaben mehrere Blätter benötigen, so sind diese zusammenzuheften. Bitte beschriften Sie Ihre Lösungen in der ersten Zeile in der folgenden Reihenfolge: **Gruppennummer in Rot**, Vorname, Name, Matrikelnummer, Blattnummer!