Universität zu Köln SS 2019
Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. A. Drewitz
Assistenten: A. Prévost, L. Schmitz

Abgabe: Bis 02.05., 18 Uhr, in den Kästen in Raum 301 des Mathematischen Institutes

4. Übung Wahrscheinlichkeitstheorie I

(Äußeres Maß, Vollständigkeit, Produktmaßraum)

Blatt 3: Korrigierte Aufgabe: 3.3
Vorzurechnende Aufgabe: 3.1

Für alle $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ mit $\varnothing \in \mathcal{A}$ und Mengenfunktionen $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit $\mu(\varnothing) = 0$ definieren wir das äußere Maß μ^* auf 2^Ω wie in Theorem 1.3.9. durch

$$\mu^*(A) := \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) : \ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \text{ und } A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Big\}, \ A \subset \Omega, \tag{4.0.1}$$

Aufgabe 4.1

(10 Punkte)

Es seien $\mathcal{I}$ ein Halbring, μ ein Inhalt auf $\mathcal{I}$, μ^* das äußere Maß wie in (4.0.1) und

$$\mathcal{M}_{\mu^*} := \{A \subset 2^\Omega : \ A \text{ ist } \mu^*\text{-messbar}\}.$$

Für jedes Mengensystem $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ sagen wir, dass $\mathcal{A}$ vollständig ist, wenn für alle $A \subset B \in \mathcal{A}$ mit $\mu^*(B) = 0$ auch gilt: $A \in \mathcal{A}$.

a) Zeigen Sie, dass die durch $\mathcal{I}$ erzeugte vollständige σ-Algebra $\overline{\sigma}(\mathcal{I})$ existiert, d.h. $\mathcal{I} \subset \overline{\sigma}(\mathcal{I})$ und für jede weitere vollständige σ-Algebra $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ gilt: $\overline{\sigma}(\mathcal{I}) \subset \mathcal{A}$. (1 Punkt)

b) Zeigen Sie $\sigma(\mathcal{I}) \subset \overline{\sigma}(\mathcal{I}) \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$. (2 Punkte)

c) Es sei $A \subset \Omega$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $A_n \in \sigma(\mathcal{I})$ existiert mit $A \subset A_n$ und $\mu^*(A_n) \leq \mu^*(A) + \frac{1}{2^n}$. (2 Punkte)

d) Es seien $A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ mit $\mu^*(A) < \infty$ und A_n, $n \in \mathbb{N}$, wie in c). Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mu^*\Big(A^c \cap \big(\bigcup_{i>n} A_i\big)\Big) \leq \frac{1}{2^n}.$$

(1 Punkt)

e) Es sei $A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ mit $\mu^*(A) < \infty$. Zeigen Sie, dass $B \in \sigma(\mathcal{I})$ existiert mit $A \subset B$ und $\mu^*(B \setminus A) = 0$. (2 Punkte)

f) Zeigen Sie, dass wenn $\mu^*_{|\mathcal{M}_{\mu^*}}$ σ-endlich ist, $\overline{\sigma}(\mathcal{I}) = \mathcal{M}_{\mu^*}$ gilt. (2 Punkte)

Aufgabe 4.2 (10 Punkte)

Es seien $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und $p \in [0,1]$. Wir definieren $[\omega_1, \dots, \omega_n] := \{(\omega'_1, \omega'_2, \dots) \in \Omega : \ \omega'_i = \omega_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}\}$ und

$$\mathcal{A} := \{[\omega_1, \dots, \omega_n] : \omega_i \in \{0,1\} \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}, \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\varnothing\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ ein Halbring auf Ω ist. (2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass $\widetilde{\mu} : \mathcal{A} \to [0,1]$, definiert durch

$$\begin{cases} \widetilde{\mu}([\omega_1, \dots, \omega_n]) = p^k (1-p)^{n-k} \text{ mit } k = \sum_{i=1}^n \omega_i, \\ \widetilde{\mu}(\varnothing) = 0, \end{cases}$$

ein Inhalt auf $\mathcal{A}$ ist. (2 Punkte)

c) Es sei $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (2^\Omega)^{\mathbb{N}}$ mit $B_n \supset B_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $B_n \neq \varnothing$ für alle n. Zeigen Sie, dass es ein $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega$ gibt mit

$$[\omega_1, \dots, \omega_k] \cap B_n \neq \varnothing \qquad \text{für alle } k, n \in \mathbb{N}.$$

(2 Punkte)

d) Es seien ω und $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie in c), wobei $B_n = \dot{\bigcup}_{k=1}^{m_n} C_k^{(n)}$ mit paarweise disjunkten $C_1^{(n)}, \dots, C_{m_n}^{(n)} \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass es für jedes n ein $i_n \in \{1, \dots, m_n\}$ gibt, sodass für hinreichend großes k gilt: $[\omega_1, \dots, \omega_k] \subset C_{i_n}^{(n)}$. Schließen Sie $\bigcap_{n=1}^\infty B_n \neq \varnothing$. (2 Punkte)

e) Zeigen Sie mithilfe von d) und der Subadditivität von $\widetilde{\mu}$, dass $\widetilde{\mu}$ aus b) σ-subadditiv ist. Schließen Sie, dass es ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\sigma(\mathcal{A})$ gibt, das $\widetilde{\mu}$ fortsetzt. (2 Punkte)

Aufgabe 4.3 (10 Punkte)

Es sei Ω eine nicht abzählbare Menge und $\nu^* : 2^\Omega \to [0, \infty]$ die Mengenfunktion definiert durch

$$\nu^*(A) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } A = \varnothing, \\ 1, & \text{wenn } \varnothing \neq A \text{ abzählbar ist}, \\ 2, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Es seien μ eine Mengenfunktion auf $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$, μ^* wie in (4.0.1) und $\widetilde{\mu}^*$ ein äußeres Maß auf 2^Ω mit $\widetilde{\mu}^*_{|\mathcal{A}} = \mu$. Zeigen Sie $\widetilde{\mu}^* \leq \mu^*$ (d.h. $\widetilde{\mu}^*(A) \leq \mu^*(A)$ für alle $A \subset \Omega$). (2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass ν^* ein äußeres Maß ist. (2 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass nur $\varnothing$ und Ω ν^*-messbar sind. (2 Punkte)

d) Es seien $\mu := \nu^*_{|\{\varnothing, \Omega\}}$ und μ^* wie in (4.0.1). Zeigen Sie, dass $A \subset \Omega$ existiert mit $\nu^*(A) < \mu^*(A)$. (2 Punkte)

e) Es seien $\mathcal{R} = \{A \subset \Omega : \ A \text{ ist endlich}\}$, $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ das Zählmaß auf $\mathcal{R}$ und μ^* wie in (4.0.1). Zeigen Sie, dass μ^* das eindeutige äußere Maß auf 2^Ω mit $\mu^*_{|\mathcal{R}} = \mu$ ist. (2 Punkte)

Anmerkung: Sollten Sie für die Bearbeitung der Aufgaben mehrere Blätter benötigen, so sind diese zusammenzuheften. Bitte beschriften Sie Ihre Lösungen in der ersten Zeile in der folgenden Reihenfolge: **Gruppennummer in Rot**, Vorname, Name, Matrikelnummer, Blattnummer!