Universität zu Köln SS 2019
Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. A. Drewitz
Assistenten: A. Prévost, L. Schmitz

Abgabe: Bis 09.05., 18 Uhr, in den Kästen in Raum 301 des Mathematischen Institutes

5. Übung Wahrscheinlichkeitstheorie I

(Lebesgue-Messbarkeit, Lebesgue-Maß, messbare Funktionen)

Blatt 4: Korrigierte Aufgabe: 4.1
Vorzurechnende Aufgabe: 4.3

Wir schreiben $\lambda := \lambda^1$ für das eindimensionale Lebesgue-Maß auf $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ und bemerken, dass es translationsinvariant ist, d.h. $\lambda(A) = \lambda(A + x)$ für alle $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ und $x \in \mathbb{R}$, wobei $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ die Lebesgue σ-Algebra ist, siehe Bemerkung 1.3.12.

Aufgabe 5.1 (10 Punkte)

Für alle $n \geq 1$ sei

$$A_n = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} 2x_i \cdot 3^{-i} : \; x_i \in \{0,1\} \text{ für alle } i \in \{1,\dots,n\} \Big\}.$$

Die Menge

$$C := \bigcap_{n=1}^{\infty} \dot{\bigcup}_{x \in A_n} \Big[x, x + \frac{1}{3^n}\Big]$$

heißt *eindimensionales Cantorsches Diskontinuum*. Ohne Beweis gilt, dass C abgeschlossen ist, und dass jedes $x \in C$ die Darstellung

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} 2x_k \cdot 3^{-k}, \qquad x_k \in \{0,1\}, \tag{1}$$

besitzt. Die *Cantorfunktion* $F : C \to [0,1]$ erhält man nun, indem man für $x \in C$ mit der Darstellung (1) $F(x) := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot 2^{-k}$, $x_k \in \{0,1\}$ definiert. Dann ist F streng monoton wachsend und surjektiv. Wir definieren jetzt $f : [0,1] \to [0,1]$ durch $f(x) = F^{-1}(x)$ für alle $x \in [0,1]$ und $\tilde{F} : [0,1] \to [0,1]$ durch $\tilde{F}(x) := \sup\{F(y) : y \in C,\ y \leq x\}$.

a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\dot{\bigcup}_{x \in A_{n+1}} \Big[x, x + \frac{1}{3^{n+1}}\Big] \subset \dot{\bigcup}_{y \in A_n} \Big[y, y + \frac{1}{3^n}\Big]. \qquad \text{(1 Punkt)}$$

b) Zeigen Sie $\lambda(C) = 0$. (1 Punkt)

c) Zeigen Sie, dass $f^{-1}([0,a]) = [0, \tilde{F}(a)]$ für alle $a \in [0,1]$ gilt und dass f eine $\mathcal{B}([0,1])$–$\mathcal{B}([0,1])$-messbare Funktion ist. (3 Punkte)

d) Es sei $V \subset [0,1]$ wie in Aufgabe 0.1. Zeigen Sie, dass $V \notin \mathcal{L}([0,1])$. (2 Punkte)

e) Zeigen Sie $f(V) \in \mathcal{L}([0,1])$, jedoch $f(V) \notin \mathcal{B}([0,1])$. (3 Punkte)

Aufgabe 5.2 (10 Punkte)

Es sei $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ mit $0 < \lambda(E) < \infty$. Wir definieren für $B, C \subset \mathbb{R}$ die Menge $B - C := \{x - y : x \in B, y \in C\}$.

a) Zeigen Sie, dass für jedes $\delta \in (0,1)$ eine Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $I_n = (a_n, b_n]$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $a_n < b_n$, $n \in \mathbb{N}$, existiert, sodass $E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(I_n) \leq \lambda(E)/(1-\delta)$. (2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass für jedes $\delta > 0$ ein Interval $I = [a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, existiert, sodass $\lambda(E \cap I) \geq (1-\delta)\lambda(I)$. (1 Punkt)

c) Es seien $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ mit $\lambda(A) = \lambda(B) \geq a > 0$ und $\lambda(A \cup B) < 2a$. Zeigen Sie $A \cap B \neq \varnothing$. (1 Punkt)

d) Zeigen Sie, dass es ein Interval $I = [a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, gibt, sodass für alle x mit $|x| < \frac{\lambda(I)}{2}$ gilt:
$$\big((E \cap I) + x\big) \cap (E \cap I) \neq \varnothing.$$
(3 Punkte)

e) Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass
$$(-\varepsilon, \varepsilon) \subset E - E.$$
(3 Punkte)

Aufgabe 5.3 (10 Punkte)

Es seien $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E})$ eine $\mathcal{F} - \mathcal{E}$-messbare Funktion und
$$\mathcal{A}_f := \{f^{-1}(B) : \ B \in \mathcal{E}\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_f$ eine σ-Algebra ist. (1 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass f $\mathcal{A}_f - \mathcal{E}$-messbar ist, und dass $\mathcal{A}_f$ die kleinste σ-Algebra ist, sodass f messbar ist, d.h. für alle σ-Algebren $\mathcal{A}' \neq \mathcal{A}_f$ mit $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}_f$ gilt: f ist nicht $\mathcal{A}' - \mathcal{E}$-messbar. (1 Punkt)

c) Zeigen Sie, dass für alle $B \in \mathcal{E}$ gilt: $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(\Omega)$. (1 Punkt)

Es sei $g : (\Omega, \mathcal{A}_f) \to (E', \mathcal{E}')$ eine $\mathcal{A}_f - \mathcal{E}'$-messbare Funktion. Für alle $x \in E$ definieren wir
$$C_x = \{a \in E' : \ x \in f(g^{-1}(\{a\}))\}.$$
Dann gilt $C_x \neq \varnothing$ für alle $x \in f(\Omega)$ und nach dem Auswahlaxiom existiert eine Auswahlfunktion $h : f(\Omega) \to E'$ mit $h(x) \in C_x$ für alle $x \in f(\Omega)$.

d) Zeigen Sie, dass für alle $A, B \in \mathcal{E}'$ mit $A \cap B = \varnothing$ gilt:
$$f(g^{-1}(A)) \cap f(g^{-1}(B)) = \varnothing.$$
(2 Punkte)

e) Zeigen Sie, dass für alle $B \in \mathcal{E}'$ gilt $g^{-1}(B) = f^{-1}(h^{-1}(B))$. (3 Punkte)

f) Es sei $\mathcal{E}_f = \{A \cap f(\Omega) : A \in \mathcal{E}\}$. Zeigen Sie, dass h $\mathcal{E}_f - \mathcal{E}'$-messbar ist. (2 Punkte)

Anmerkung: Sollten Sie für die Bearbeitung der Aufgaben mehrere Blätter benötigen, so sind diese zusammenzuheften. Bitte beschriften Sie Ihre Lösungen in der ersten Zeile in der folgenden Reihenfolge: **Gruppennummer in Rot**, Vorname, Name, Matrikelnummer, Blattnummer!