

Abgabe: Bis 16.05., 18 Uhr, in den Kästen in Raum 301 des Mathematischen Institutes

6. Übung Wahrscheinlichkeitstheorie I

(Verteilungsfunktionen, messbare Funktionen)



Blatt 5: Korrigierte Aufgabe: 5.1
Vorzurechnende Aufgabe: 5.2

Aufgabe 6.1

(10 Punkte)

Wir erinnern daran, dass die Definition einer Verteilungsfunktion in Definition 1.5.3. gegeben ist und dass die Definition einer Verteilungsfunktion von einem Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, bzw. einer Zufallsvariablen $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, in Definition 1.5.1. gegeben ist.

- Zeigen Sie Theorem 1.5.2.: Wenn F eine Verteilungsfunktion von einem Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ist, dann ist F eine Verteilungsfunktion. (2 Punkte)
- Zeigen Sie Theorem 1.5.4.: Wenn F eine Verteilungsfunktion ist, dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, sodass F die Verteilungsfunktion von μ ist. Hinweis: Benutzen Sie ein Lebesgue-Stieltjes Maß. (2 Punkte)
- Es seien μ und μ' zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und F eine Verteilungsfunktion, sodass F die Verteilungsfunktion von μ und μ' ist. Zeigen Sie $\mu = \mu'$. (2 Punkte)
- Zeigen Sie, dass wenn F eine Verteilungsfunktion ist, F linksseitige Limiten besitzt, das heißt, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ der Limes

$$\lim_{h \downarrow 0} F(x - h)$$

existiert. Man nennt F „càdlàg“ („continue à droite, limite à gauche“), wenn die Funktion rechtsseitig stetig ist und linksseitige Limiten besitzt. (1 Punkt)

- Es sei F eine Verteilungsfunktion. Zeigen Sie, dass ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und eine Zufallsvariable $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ existieren, sodass F die Verteilungsfunktion von X ist. (1 Punkt)
- Es sei $F(t) = t\mathbb{1}_{[0,1]}(t) + \mathbb{1}_{(1,\infty)}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und zwei Zufallsvariablen $X, Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ existieren mit $X \neq Y$, sodass F die Verteilungsfunktion von X und Y ist. (2 Punkte)

Aufgabe 6.2

(10 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie oder widerlegen Sie:

- a) Wenn f eine Funktion ist, die nur endlich viele Werte annimmt, dann ist f immer $\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar. (1 Punkt)
- b) Wenn $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und f differenzierbar ist, dann ist $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar. (1 Punkt)
- c) Wenn f eine Funktion ist mit
$$\{\omega \in \Omega : f(\omega) \leq x, f(\omega) \neq 0\} \in \mathcal{F} \text{ für alle } x \in \mathbb{R},$$
dann ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar. (1 Punkt)
- d) Wenn f eine Funktion ist mit $f^{-1}(\{a\}) \in \mathcal{F}$ für alle $a \in \mathbb{R}$, dann ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar. (2 Punkte)
- e) Wenn $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und f monoton wachsend ist, dann ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar. (1 Punkt)
- f) Wenn g eine $\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare Funktion ist, sodass ein $N \in \mathcal{F}$ existiert mit $\mu(N) = 0$ und $\{\omega \in \Omega : f(\omega) \neq g(\omega)\} \subset N$, dann ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar. (2 Punkte)
- g) Wenn $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda)$ und g eine $\mathcal{L}(\mathbb{R}) - \mathcal{L}(\mathbb{R})$ -messbare Funktion ist, sodass ein $N \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ existiert mit $\lambda(N) = 0$ und $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\} \subset N$, dann ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{L}(\mathbb{R}) - \mathcal{L}(\mathbb{R})$ -messbar. (2 Punkte)

Allgemeiner Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 5.1 benutzen.

Aufgabe 6.3

(10 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare Funktion mit

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Wir nehmen für a) bis e) an, dass $f(1) = 1$ gilt.

- a) Zeigen Sie $f(q) = q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. (2 Punkte)
- b) Zeigen Sie $f^{-1}(q + (-\varepsilon, \varepsilon)) = q + f^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon))$ für alle $q \in \mathbb{Q}$ und $\varepsilon > 0$. (1 Punkt)
- c) Zeigen Sie $\lambda(f^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon))) > 0$ für alle $\varepsilon > 0$. (2 Punkte)
- d) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 5.2.e), dass f stetig in 0 ist. (2 Punkte)
- e) Zeigen Sie $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (1 Punkt)
- f) Zeigen Sie, dass wenn $f(1) \neq 1$, so gilt $f(x) = xf(1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (2 Punkte)

Anmerkung: Sollten Sie für die Bearbeitung der Aufgaben mehrere Blätter benötigen, so sind diese zusammenzuheften. Bitte beschriften Sie Ihre Lösungen in der ersten Zeile in der folgenden Reihenfolge: **Gruppennummer in Rot**, Vorname, Name, Matrikelnummer, Blattnummer!