

Abgabe: Bis 23.05., 18 Uhr, in den Kästen in Raum 301 des Mathematischen Institutes

7. Übung Wahrscheinlichkeitstheorie I

(Einfache Funktionen, Riemann-Integral, Lebesgue-Integral)

Blatt 6: Korrigierte Aufgabe: 6.2
Vorzurechnende Aufgabe: 6.1

Blatt 7: Vorzurechnende Aufgabe: 7.3

Aufgabe 7.1

(10 Punkte)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Menge der Unterteilungen

$$\mathcal{U}_n((a, b]) := \{(t, \xi) \in [a, b]^{n+1} \times (a, b]^n : a = t_0 < \xi_1 \leq t_1 < \xi_2 \leq \dots < \xi_n \leq t_n = b\},$$

sowie die Feinheit $\Delta_n((t, \xi)) := \sup_{i=1, \dots, n} |t_i - t_{i-1}|$ für alle $(t, \xi) \in \mathcal{U}_n((a, b])$. Es sei $f : (a, b] \rightarrow [0, \infty)$ eine nichtnegative Riemann-integrierbare Funktion, d.h. dass für alle Folgen $(t^{(n)}, \xi^{(n)}) \in \mathcal{U}_n((a, b])$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\Delta((t^{(n)}, \xi^{(n)})) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}) f(\xi_i^{(n)})$$

existiert, endlich ist und unabhängig von der Wahl der Folge ist. Dieser Grenzwert ist dann das Riemann-Integral $\int_a^b f(x) dx$ von f . Außerdem sagen wir, dass g eine Treppenfunktion ist, wenn $n \in \mathbb{N}$, $(t, \xi) \in \mathcal{U}_n((a, b])$ und $\alpha_i \in [0, \infty)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, existieren mit

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{(t_{i-1}, t_i]}(x) \text{ für alle } x \in (a, b].$$

a) Zeigen Sie, dass f beschränkt ist. (2 Punkte)

b) Zeigen Sie

$$\sup_{\substack{g \text{ Treppenfunktion} \\ g \leq f}} \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \inf_{\substack{g \text{ Treppenfunktion} \\ g \geq f}} \int_a^b g(x) dx. \quad (3 \text{ Punkte})$$

c) Zeigen Sie, dass es dann $\mathcal{B}((a, b]) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare Funktionen $m, M : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $m \leq f \leq M$ und

$$\int_{(a, b]} m d\lambda = \int_a^b f(x) dx = \int_{(a, b]} M d\lambda. \quad (3 \text{ Punkte})$$

d) Zeigen Sie, dass f $\mathcal{L}((a, b]) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar ist.

Hinweis: Sie dürfen die Gültigkeit der Aussage von Aufgabe 6.2 g) annehmen, wenn man $\mathcal{L}(\mathbb{R}) - \mathcal{L}(\mathbb{R})$ -Messbarkeit durch $\mathcal{L}((a, b]) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -Messbarkeit austauscht. (1 Punkt)

e) Zeigen Sie, dass f auch Lebesgue-integrierbar ist und die Integrale übereinstimmen, d.h.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{(a, b]} f d\lambda. \quad (1 \text{ Punkt})$$

Aufgabe 7.2

(10 Punkte)

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < b < \infty$ und $A \subset [a, b]$ mit $\lambda|_{[a,b]}(A^c) = 0$. Wir definieren die σ -Algebra $\mathcal{L}(A) := \{A \cap B : B \in \mathcal{L}([a, b])\}$.

- a) Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine $\mathcal{L}([a, b]) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare und $\lambda|_{[a,b]}$ -integrierbare Funktion, die stetig in a und b ist, und $g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch

$$g_n(x) = \begin{cases} n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x)), & \text{wenn } x \in [a, b - \frac{1}{n}], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ g_n eine $\mathcal{L}([a, b]) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare und $\lambda|_{[a,b]}$ -integrierbare Funktion ist und

$$\int_{[a,b]} g_n d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(b) - f(a).$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass für alle $c \in (0, b - a)$ und $\mathcal{L}([a, b]) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbare und $\lambda|_{[a,b]}$ -integrierbare Funktionen g gilt:

$$\int_{[a,b-c]} g(x+c) d\lambda(x) = \int_{[a+c,b]} g(x) d\lambda(x).$$

(3 Punkte)

- b) Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, sodass $M < \infty$ existiert mit $|f'(x)| \leq M$ für alle $x \in [a, b]$. Zeigen Sie, dass f' $\lambda|_{[a,b]}$ -integrierbar ist und

$$\int_{[a,b]} f' d\lambda = f(b) - f(a).$$

(2 Punkte)

- c) Es sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine $\mathcal{L}(A) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare und $\lambda|_A$ -integrierbare Funktion und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $g|_A = f$. Zeigen Sie, dass g $\mathcal{L}([a, b]) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar und $\lambda|_{[a,b]}$ -integrierbar ist und

$$\int_A f d\lambda = \int_{[a,b]} g d\lambda.$$

(2 Punkte)

- d) Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion, sodass f stetig in a und b ist und f auf A differenzierbar ist. Zeigen Sie

$$\int_A f' d\lambda \leq f(b) - f(a).$$

Hinweis: Sie dürfen die Gültigkeit der Aussage von Aufgabe 6.2 e) annehmen. (2 Punkte)

- e) Es sei $C \subset [0, 1]$ die Cantor-Menge und $\tilde{F} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ die Fortsetzung der Cantorfunktion, die wir in Aufgabe 5.1 definiert haben. Zeigen Sie, dass $\tilde{F}$ auf C^c differenzierbar ist und

$$\int_{C^c} \tilde{F}' d\lambda < \tilde{F}(1) - \tilde{F}(0).$$

(1 Punkt)

Aufgabe 7.3

(10 Punkte)

Es seien $(E, \mathcal{E})$ ein Messraum, $A \subset E$, $\mathcal{E}_A := \{A \cap B : B \in \mathcal{E}\}$ und $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine $\mathcal{E}_A - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare Funktion. Wir werden in dieser Aufgabe zeigen, dass

eine Funktion $\tilde{h} : E \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, sodass $\tilde{h}$ $\mathcal{E} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar ist und $\tilde{h}|_A = h$ gilt. (7.3.1)

a) Zeigen Sie (7.3.1), wenn $A \in \mathcal{E}$. (1 Punkt)

b) Zeigen Sie (7.3.1), wenn $h \in \mathcal{T}^+$ (d.h. h ist eine nichtnegative einfache Funktion). (2 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass für jede Folge $f_n : E \rightarrow [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, von $\mathcal{E} - \mathcal{B}([0, \infty))$ -messbaren Funktionen die Funktion f , definiert durch

$$f := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n, & \text{wenn } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \text{ existiert,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

auch $\mathcal{E} - \mathcal{B}([0, \infty))$ -messbar ist. (2 Punkte)

d) Zeigen Sie (7.3.1) für alle $\mathcal{E}_A - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbaren Funktionen h . (2 Punkte)

e) Es sei $f : \Omega \rightarrow E$ eine $\mathcal{F} - \mathcal{E}$ -messbare Funktion, $\mathcal{A}_f := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{E}\}$ und $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine $\mathcal{A}_f - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare Funktion. Zeigen Sie, dass eine Funktion $\tilde{h} : E \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, sodass $\tilde{h}$ $\mathcal{E} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar ist und $g = \tilde{h} \circ f$ gilt. (3 Punkte)

Anmerkung: Sollten Sie für die Bearbeitung der Aufgaben mehrere Blätter benötigen, so sind diese zusammenzuheften. Bitte beschriften Sie Ihre Lösungen in der ersten Zeile in der folgenden Reihenfolge: **Gruppennummer in Rot**, Vorname, Name, Matrikelnummer, Blattnummer!