

Abgabe: Bis 31.05., 14 Uhr, in den Kästen in Raum 301 des Mathematischen Institutes

8. Übung Wahrscheinlichkeitstheorie I

(Signierte Maße, Zerlegungssatz von Lebesgue, Transformationssatz)

Blatt 7: Korrigierte Aufgabe: 7.2

Blatt 8: Vorzurechnende Aufgabe: 8.3

Aufgabe 8.1

(10 Punkte)

In dieser Aufgabe beweisen wir den Transformationssatz, also Theorem 2.2.19 im Skript. Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$ Messraum, $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ eine $\mathcal{F} - \tilde{\mathcal{F}}$ -messbare Funktion und $\tilde{\mu} := \mu \circ \varphi^{-1}$.

- a) Zeigen Sie für alle nichtnegativen einfachen Funktionen $f : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int f \circ \varphi \, d\mu = \int f \, d\tilde{\mu}. \quad (2 \text{ Punkte})$$

- b) Zeigen Sie für alle $\tilde{\mathcal{F}} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbaren Funktionen $f : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, dass $f \circ \varphi$ genau dann μ -integrierbar ist, wenn f $\tilde{\mu}$ -integrierbar ist, und dann gilt:

$$\int f \circ \varphi \, d\mu = \int f \, d\tilde{\mu}. \quad (2 \text{ Punkte})$$

Ab jetzt nehmen wir an, dass $\Omega \subset \mathbb{R}$ und $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}$ offene Mengen sind, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$, $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{B}(\tilde{\Omega})$, $\mu = \lambda$ und $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ eine streng steigende, bijektive und differenzierbare Funktion ist, sodass $\varphi^{-1} : \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}$ -messbar ist und für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Konstante $M_n < \infty$ existiert mit $|\varphi'(x)| \leq M_n$ für alle $x \in \Omega \cap [-n, n]$. Es sei ν das Maß auf $\tilde{\Omega}$ mit $\nu(A) = \lambda(\varphi(A))$ für alle $A \in \tilde{\mathcal{F}}$.

- c) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 7.2, dass für alle $a < b$ mit $[a, b] \subset \tilde{\Omega}$ gilt:

$$\int_{[a,b]} \varphi' \, d\lambda = \nu([a, b]). \quad (1 \text{ Punkt})$$

- d) Zeigen Sie $\lambda = \nu \circ \varphi^{-1}$ und $\nu = \varphi' \cdot \lambda$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existieren mit

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]. \quad (3 \text{ Punkte})$$

- e) Zeigen Sie für alle $\tilde{\mathcal{F}} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbaren Funktionen $f : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, dass $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ genau dann $\lambda|_{\Omega}$ -integrierbar ist, wenn f $\lambda|_{\tilde{\Omega}}$ -integrierbar ist, und dann gilt:

$$\int (f \circ \varphi) \cdot \varphi' \, d\lambda = \int f \, d\lambda. \quad (2 \text{ Punkte})$$

Aufgabe 8.2

(10 Punkte)

In dieser Aufgabe beweisen wir den Zerlegungssatz von Lebesgue, also Theorem 2.2.16 im Skript: für alle endliche Maße μ und ν auf $(\Omega, \mathcal{F})$

existieren zwei Maße ν_{ac} und ν_s und eine $\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare und nichtnegative Funktion g mit $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$, $\nu_{ac} \ll \mu$, $\nu_s \perp \mu$ und $\nu_{ac} = g \cdot \mu$. (8.2.1)

Wir nehmen an, dass $\nu \not\ll \mu$. Es sei

$$\Gamma = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist } \mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R})\text{-messbar, nichtnegativ und } f \cdot \mu \leq \nu\}.$$

- a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir das signierte Maß

$$\sigma_n := \nu - \frac{1}{n}\mu.$$

Zeigen Sie, dass $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{F}$ existieren mit $\sigma_n|_A \geq 0$ und $\mu(A) > 0$. (3 Punkte)

- b) Zeigen Sie, dass $f \in \Gamma$ existiert mit $\int f d\mu > 0$. (1 Punkt)

- c) Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Gamma^{\mathbb{N}}$. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$: $\sup_{p \leq n} f_p \in \Gamma$. (2 Punkte)

- d) Zeigen Sie, dass $g \in \Gamma$ existiert, sodass für alle $f \in \Gamma$ gilt: $\int f d\mu \leq \int g d\mu$. (2 Punkte)

- e) Zeigen Sie (8.2.1). (2 Punkte)

Aufgabe 8.3

(10 Punkte)

Es sei μ ein σ -endliches signiertes Maß und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine $\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare und $|\mu|$ -integrierbare Funktion. Wir definieren

$$\int f d\mu := \int f d\mu^+ - \int f d\mu^-.$$

Außerdem definieren wir das signierte Maß $\nu = f \cdot \mu$ durch $\nu(A) = \int_A f d\mu$ für alle $A \in \mathcal{F}$.

- a) Zeigen Sie, dass $\int f d\mu^+ < \infty$ und $\int f d\mu^- < \infty$. Insbesondere ist $\int f d\mu$ wohldefiniert. (1 Punkt)

- b) Zeigen Sie $\nu^+ = f^+ \cdot \mu^+ + f^- \cdot \mu^-$, $\nu^- = f^+ \cdot \mu^- + f^- \cdot \mu^+$ und $|\nu| = |f| \cdot |\mu|$. (3 Punkte)

- c) Zeigen Sie für jede $\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare Funktion g , dass g genau dann $|\nu|$ -integrierbar ist, wenn fg $|\mu|$ -integrierbar ist, und dann gilt:

$$\int g d\nu = \int fg d\mu. \quad (2 \text{ Punkte})$$

- d) Zeigen Sie

$$|\nu|(\Omega) = \sup_{A \in \mathcal{F}} |\nu(A) - \nu(A^c)| = \int |f| d|\mu|. \quad (3 \text{ Punkte})$$

- e) Es seien $f_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zwei $\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare und $|\mu|$ -integrierbare Funktionen mit $\int f_1 d\mu = \int f_2 d\mu$, und $\nu_1 := f_1 \cdot \mu$ und $\nu_2 := f_2 \cdot \mu$. Zeigen Sie

$$\|\nu_1 - \nu_2\|_{\text{TV}} := \sup_{A \in \mathcal{F}} |\nu_1(A) - \nu_2(A)| = \frac{1}{2} \int |f_1 - f_2| d|\mu|. \quad (1 \text{ Punkt})$$

Anmerkung: Sollten Sie für die Bearbeitung der Aufgaben mehrere Blätter benötigen, so sind diese zusammenzuheften. Bitte beschriften Sie Ihre Lösungen in der ersten Zeile in der folgenden Reihenfolge: **Gruppennummer in Rot**, Vorname, Name, Matrikelnummer, Blattnummer!