Universität zu Köln SS 2019
Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. A. Drewitz
Assistenten: A. Prévost, L. Schmitz

Abgabe: Bis 21.06., 14 Uhr, in den Kästen in Raum 301 des Mathematischen Institutes

10. Übung Wahrscheinlichkeitstheorie I

(Sätze von Fubini und Tonelli, charakteristische Funktionen)

Blatt 9: Korrigierte Aufgabe: 9.2

Blatt 10: Vorzurechnende Aufgabe: 10.3

Aufgabe 10.1 (10 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir als Anwendung von Proposition 2.4.3 eine allgemeine Formel für die partielle Integration von geeigneten Funktionen herleiten. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, $F_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, rechtsstetige, nicht-fallende Funktionen, und μ_i, $i = 1, 2$, die zugehörigen Lebesgue-Stieltjes-Maße, sowie $D_i := \{x \in (a, b] : \mu_i(\{x\}) > 0\}$, $i = 1, 2$.

a) Zeigen Sie, dass $D_1 \cup D_2$ abzählbar ist und

$$\int_{(a,b]} \mu_1(\{x\}) \,\mathrm{d}\mu_2(x) = \sum_{z \in D_1 \cap D_2} \mu_1(\{z\})\mu_2(\{z\}).$$

(2 Punkte)

b) Zeigen Sie

$$\big(\mu_1 \otimes \mu_2\big)\big(\{(x, y) : a < x = y \leq b\}\big) = \sum_{z \in D_1 \cap D_2} \mu_1(\{z\})\mu_2(\{z\}).$$

(2 Punkte)

c) Zeigen Sie

$$\big(\mu_1 \otimes \mu_2\big)\big(\{(x, y) : a < y < x \leq b\}\big) = F_1(b)(F_2(b) - F_2(a)) - \int_{(a,b]} F_1 \,\mathrm{d}\mu_2,$$

$$\big(\mu_1 \otimes \mu_2\big)\big(\{(x, y) : a < x < y \leq b\}\big) = F_2(b)(F_1(b) - F_1(a)) - \int_{(a,b]} F_2 \,\mathrm{d}\mu_1.$$

(2 Punkte)

d) Zeigen Sie mithilfe von b) und c) die Identität

$$\int_{(a,b]} F_1 \,\mathrm{d}\mu_2 = F_1(b)F_2(b) - F_1(a)F_2(a) - \int_{(a,b]} F_2 \,\mathrm{d}\mu_1 + \sum_{z \in D_1 \cap D_2} \mu_1(\{z\})\mu_2(\{z\}).$$

(2 Punkte)

e) Wir nehmen an, dass F_i, $i = 1, 2$, differenzierbar sind mit $|F_i'(x)| \leq M_i$ für alle $x \in (a, b]$. Zeigen Sie mithilfe von d) die Formel der partiellen Integration:

$$\int_{(a,b]} F_1 F_2' \,\mathrm{d}\lambda = F_1(b)F_2(b) - F_1(a)F_2(a) - \int_{(a,b]} F_2 F_1' \,\mathrm{d}\lambda.$$

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 7.2 b) (2 Punkte)

Aufgabe 10.2 (10 Punkte)

In dieser Aufgabe zeigen wir den Großen Umordnungssatz. Es sei μ das Zählmaß auf $2^{\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k| < \infty$$

(dies ist wohldefiniert, da $n \mapsto \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ steigend ist) und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(n) = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Es sei $g : \mathbb{N} \to [0, \infty)$. Zeigen Sie

$$\int g \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} g(k).$$

(2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{und} \quad \int f \, \mathrm{d}\mu$$

existieren, endlich und gleich sind. (2 Punkte)

c) Es sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Zeigen Sie mithilfe von b)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)}.$$

Wir nennen diesen Grenzwert $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ und wir sagen allgemein, dass $\sum_{k\in\mathbb{N}} b_k$ wohldefiniert ist für $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, falls $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty$. (2 Punkte)

d) Es sei $(a_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^2}$ ein Folge mit $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n,m}| < \infty$. Zeigen Sie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} a_{n,m} = \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,m}.$$

und insbesondere, dass alle obigen Summen wohldefiniert sind. (3 Punkte)

e) Es sei $(c_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^2}$ eine Folge mit $c_{n,m} = 1$, wenn $m = n$, $c_{n,m} = -1$, wenn $m = n + 1$, und $c_{n,m} = 0$ sonst. Zeigen Sie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} c_{n,m} \neq \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} c_{n,m}.$$

Weshalb widerspricht dies nicht Fubini? (1 Punkt)

Aufgabe 10.3 (10 Punkte)

a) Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $a < b$ in $\mathbb{R}$ und $f : (a,b) \times \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion, sodass

- $\omega \mapsto f(t,\omega)$ $\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{C})$-messbar und μ-integrierbar ist für alle $t \in (a,b)$,
- für alle $\omega \in \Omega$, $\mapsto f(t,\omega)$ differenzierbar ist, wobei wir die Ableitung mit $\frac{\partial f}{\partial t}$ bezeichnen,
- eine nicht-negative, $\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{C})$-messbare und μ-integrierbare Funktion g existiert mit $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,\omega)\right| \leq g(\omega)$ für alle $t \in (a,b)$ und $\omega \in \Omega$.

Zeigen Sie, dass $t \mapsto \int f(t,\omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega)$ differenzierbar ist und für alle $t \in (a,b)$ gilt:

$$\left(\int f(\cdot,\omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega)\right)'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t,\omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega).$$

Hinweis: Sie dürfen den Satz von der majorisierten Konvergenz ohne Beweis auch für komplexwertige Funktionen benutzen. (3 Punkte)

b) Es seien $n \in \mathbb{N}$, ν ein endliches Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sodass $x \mapsto x^k$ ν-integrierbar ist für alle $k \in \{0, \dots, n\}$, und φ_ν seine charakteristische Funktion. Zeigen Sie, dass φ_ν n-mal differenzierbar ist und für alle $k \in \{0, \dots, n\}$ gilt:

$$\varphi_\nu^{(k)}(t) = i^k \int x^k \exp(itx)\,\mathrm{d}\nu(x) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

(4 Punkte)

c) Es seien $\lambda > 0$ und X eine Poi_λ-verteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie φ_X und berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{E}[X^2]$ mithilfe von φ_X. (3 Punkte)

Anmerkung: Sollten Sie für die Bearbeitung der Aufgaben mehrere Blätter benötigen, so sind diese zusammenzuheften. Bitte beschriften Sie Ihre Lösungen in der ersten Zeile in der folgenden Reihenfolge: **Gruppennummer in Rot**, Vorname, Name, Matrikelnummer, Blattnummer!