Universität zu Köln SS 2019

Institut für Mathematik

Dozent: Prof. Dr. A. Drewitz

Assistenten: A. Prévost, L. Schmitz

Abgabe: Bis 27.06., 18 Uhr, in den Kästen in Raum 301 des Mathematischen Institutes

11. Übung Wahrscheinlichkeitstheorie I

(Borel-Cantelli Lemmas, Unabhängigkeit, terminale σ-Algebra)

Blatt 10: Korrigierte Aufgabe: 10.1

Blatt 11: Vorzurechnende Aufgabe: 11.2

Aufgabe 11.1 (10 Punkte)

Es seien X, Y zwei reelle Zufallsvariablen. Wir schreiben $\varphi_{(X,Y)}$ für die charakteristische Funktion der $\mathbb{R}^2$-wertigen Zufallsvariablen (X, Y).

a) Es seien f und g zwei $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{C})$-messbare Funktionen, sodass $f(X)$ und $g(Y)$ $\mathbb{P}$-integrierbar sind. Zeigen Sie, dass wenn X und Y unabhängig sind, dann gilt:

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)].$$

(2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass X und Y genau dann unabhängig sind, wenn $\varphi_{(X,Y)}(t, s) = \varphi_X(t)\varphi_Y(s)$ für alle $t, s \in \mathbb{R}$ gilt. (2 Punkte)

c) Es sei $Z = (Z_1, \ldots, Z_d) : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ eine Zufallsvariable, sodass $C < \infty$ existiert mit $|Z_j| \leq C$ für alle $j \in \{1, \ldots, d\}$. Zeigen Sie für alle $(t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d$:

$$\varphi_Z(t_1, \ldots, t_d) = \sum_{k_1,\ldots,k_d \in \mathbb{N}_0} \frac{(it_1)^{k_1} \times \cdots \times (it_d)^{k_d} \mathbb{E}[Z_1^{k_1} \times \cdots \times Z_d^{k_d}]}{\prod_{j=1}^d k_j!}.$$

(2 Punkte)

d) Wir nehmen an, dass $C < \infty$ existiert, sodass $|X| \leq C$ und $|Y| \leq C$. Zeigen Sie, dass X und Y genau dann unabhängig sind, wenn für alle $k, p \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathbb{E}[X^k Y^p] = \mathbb{E}[X^k]\mathbb{E}[Y^p].$$

(2 Punkte)

e) Es sei nun X eine Uni$([-1, 1])$-verteilte Zufallsvariable und $Y = |X|$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$, aber X und Y nicht unabhängig sind. (2 Punkte)

Aufgabe 11.2 (10 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ ein Folge von Ereignissen.

a) Es gelte

$$\mathbb{P}(A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_n^c \cap A_{n+1}\right) < \infty.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt: $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0$. (2 Punkte)

b) Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

$$\mathbb{P}\Big(\liminf_{n\to\infty} X_n \geq a\Big) = 1 \iff \mathbb{P}\Big(\limsup_{n\to\infty} \big\{X_n \leq a - \varepsilon\big\}\Big) = 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0,$$

$$\mathbb{P}\Big(\limsup_{n\to\infty} X_n \leq a\Big) = 1 \iff \mathbb{P}\Big(\limsup_{n\to\infty} \big\{X_n \geq a + \varepsilon\big\}\Big) = 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

(3 Punkte)

Es seien nun $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch Exp(1)-verteilt und $Z_n := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

c) Zeigen Sie: $\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} X_n/\ln n \leq 1\big) = 1$. (1 Punkt)

d) Zeigen Sie: $\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} Z_n/\ln n \leq 1\big) = 1 = \mathbb{P}\big(\liminf_{n\to\infty} Z_n/\ln n \geq 1\big)$. (3 Punkte)

e) Zeigen Sie: $Z_n/\ln n \to 1$ $\mathbb{P}$-f.s.. (1 Punkt)

Aufgabe 11.3 (10 Punkte)

Es sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zufallsvariablen.

a) Zeigen Sie Beispiel 3.2.15, d.h. dass $\sum_{i=1}^{n} X_i$ entweder mit Wahrscheinlichkeit 0 oder 1 konvergiert, wenn $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine unabhängige Familie ist. (2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass $X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ mit Wahrscheinlichkeit 0, wenn $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine u.i.v. Familie mit $\mathbb{P}(X_1 \neq 0) > 0$ ist. (1 Punkt)

c) Es sei X eine nicht-negative Zufallsvariable. Zeigen Sie für alle $\alpha > 0$:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \alpha n \mathbb{P}(\alpha n \leq X < \alpha(n+1)) \leq \mathbb{E}[X] \leq \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \alpha(n+1)\mathbb{P}(\alpha n \leq X < \alpha(n+1))$$

(2 Punkte)

d) Wir nehmen an, dass $(X_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine u.i.v. Familie von nicht-negativen Zufallsvariablen ist. Zeigen Sie für alle $\alpha > 0$:

$$\frac{\alpha}{2} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n \geq \alpha n) \leq \mathbb{E}[X_1] \leq \alpha \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{P}(X_n \geq \alpha n).$$

(3 Punkte)

e) Es sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ wie in d). Zeigen Sie:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{f.s,} \quad \text{wenn } \mathbb{E}[X_1] < \infty, \\ \infty & \text{f.s,} \quad \text{wenn } \mathbb{E}[X_1] = \infty. \end{cases}$$

(2 Punkte)

Anmerkung: Sollten Sie für die Bearbeitung der Aufgaben mehrere Blätter benötigen, so sind diese zusammenzuheften. Bitte beschriften Sie Ihre Lösungen in der ersten Zeile in der folgenden Reihenfolge: **Gruppenummer in Rot**, Vorname, Name, Matrikelnummer, Blattnummer!