Universität zu Köln SS 2019
Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. A. Drewitz
Assistenten: A. Prévost, L. Schmitz

Abgabe: Bis 04.07., 18 Uhr, in den Kästen in Raum 301 des Mathematischen Institutes

12. Übung Wahrscheinlichkeitstheorie I

($\mathcal{L}^p$ Räume, Normalverteilung, Kovarianz)

Blatt 11: Korrigierte Aufgabe: 11.3

Blatt 12: Vorzurechnende Aufgabe: 12.1

Dies ist das **letzte Übungsblatt**. Für die Zulassung müssen Sie **60 Punkte** erreichen.

Aufgabe 12.1 (10 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $p \in (1, \infty]$, sowie $f, g \in \mathcal{L}^p$. Wir beweisen in dieser Aufgabe Theorem 3.4.5. Für die Aufgabenteile a) - c) nehmen wir $p \in (1, \infty)$ an.

a) Zeigen Sie $f + g \in \mathcal{L}^p$ und

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f(f+g)^{p-1}\|_1 + \|g(f+g)^{p-1}\|_1. \quad \text{(1 Punkt)}$$

b) Es sei $q := \frac{p}{p-1}$. Zeigen Sie:

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f\|_p \Big(\int |f+g|^p \, \mathrm{d}\mu \Big)^{1/q} + \|g\|_p \Big(\int |f+g|^p \, \mathrm{d}\mu \Big)^{1/q}. \quad \text{(2 Punkte)}$$

c) Zeigen Sie: $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. (1 Punkt)

d) Angenommen $p = \infty$. Zeigen Sie: $f+g \in \mathcal{L}^\infty$ und $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. (2 Punkte)

e) Angenommen $p = \infty$. Zeigen Sie, dass sowohl $\mu(|f| > \|f\|_\infty) = 0$, als auch $\mu\left(|f| \in [\|f\|_\infty - \varepsilon, \|f\|_\infty]\right) > 0$ für alle $\varepsilon > 0$ gilt. (2 Punkte)

f) Angenommen $f \in \mathcal{L}^\infty$ und μ ist endlich. Zeigen Sie:

$$\|f\|_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty. \quad \text{(2 Punkte)}$$

Aufgabe 12.2 (10 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $p \in [1, \infty)$, sowie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p$, $f \in \mathcal{L}^p$ derart, dass $f_n \to f$ μ-f.ü.

a) Angenommen $\|f_n - f\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Zeigen Sie: $\|f_n\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|f\|_p$. (1 Punkt)

b) Zeigen Sie $|f_n - f|^p \leq 2^p(|f_n|^p + |f|^p) =: h_n$. (1 Punkt)

c) Es sei h_n wie in b). Zeigen Sie:

$$\int 2^{p+1}|f|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \Big(\int h_n \, \mathrm{d}\mu - \|f_n - f\|_p^p \Big).$$ (3 Punkte)

d) Angenommen $\|f_n\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} \|f\|_p$. Zeigen Sie: $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. (3 Punkte)

e) Es seien nun $p = 1$, $f_n \geq 0$ μ-f.s. für alle $n \in \mathbb{N}$, $f \geq 0$ μ-f.s., $\nu_n := f_n \cdot \mu$, $\nu := f \cdot \mu$. Angenommen $\nu_n(\Omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \nu(\Omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$\|\nu_n - \nu\|_{\mathrm{TV}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Bemerkung: Wir haben $\|\cdot\|_{\mathrm{TV}}$ in Aufgabe 8.3 eingeführt. (2 Punkte)

Aufgabe 12.3

(10 Punkte)

Wir definieren $\mathcal{N}(0, \Sigma) := (f_\Sigma \cdot \lambda^2)$ die zweidimensionale zentrierte Normalverteilung, wobei $\Sigma = (\Sigma_{i,j})_{i,j\in\{1,2\}}$ eine symmetrische positiv definite Matrix ist und

$$f_\Sigma(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^T\Sigma^{-1}x\Big) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^2.$$

Wir erinnern, dass Σ invertierbar ist und eine eindeutige symmetrische positiv definite Matrix $\sqrt{\Sigma}$ existiert mit $(\sqrt{\Sigma})^2 = \Sigma$ und $(\sqrt{\Sigma})^{-1} = \sqrt{\Sigma^{-1}}$.

a) Zeigen Sie, dass für jede symmetrische positiv definite Matrix A gilt: $\lambda^2 \circ A = \det(A) \cdot \lambda^2$. Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass λ^2 das einzige Maß auf $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ ist, sodass $\lambda^2(B + x) = \lambda^2(B)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $\lambda^2([0,1]^2) = 1$. (2 Punkte)

b) Es seien X' und Y' zwei unabhängige $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen (ZV), $Z' = (X', Y')$ und $Z = \sqrt{\Sigma}(Z')^T$. Zeigen Sie, dass Z eine $\mathcal{N}(0, \Sigma)$-verteilte ZV ist. (3 Punkte)

c) Es sei (X, Y) eine $\mathcal{N}(0, \Sigma)$-verteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass X eine $\mathcal{N}(0, \Sigma_{1,1})$-verteilte ZV ist, Y eine $\mathcal{N}(0, \Sigma_{2,2})$-verteilte ZV ist, und $\mathrm{Cov}(X, Y) = \Sigma_{1,2}$. (2 Punkte)

d) Es sei (X, Y) eine $\mathcal{N}(0, \Sigma)$-verteilte Zufallsvariable mit $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. Zeigen Sie, dass X und Y unabhängig sind. (1 Punkt)

e) Es sei X eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte ZV, Z eine von X unabhängige ZV auf $\{-1, 1\}$ mit $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = -1) = \frac{1}{2}$ und $Y = XZ$. Zeigen Sie, dass X und Y $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte ZV sind, aber keine symmetrische positiv definite Matrix Σ existiert, sodass (X, Y) eine $\mathcal{N}(0, \Sigma)$-verteilte ZV ist. (2 Punkte)

Anmerkung: Sollten Sie für die Bearbeitung der Aufgaben mehrere Blätter benötigen, so sind diese zusammenzuheften. Bitte beschriften Sie Ihre Lösungen in der ersten Zeile in der folgenden Reihenfolge: **Gruppenummer in Rot**, Vorname, Name, Matrikelnummer, Blattnummer!