Mathematisches Institut
der Universität zu Köln
apl. Prof. Dr. D. Horstmann
Dr. S. Littig

Wintersemester 2017/2018
25. Oktober 2017

3. Übung zur Mathematik I für Biologie und Chemie

Am Mittwoch den 01. 11. 2017 ist Feiertag. Abgabe der bepunkteten Aufgaben daher am **Donnerstag den 02. 11. 2017 bzw. Freitag den 03. 11. 2017 in der Übung**. Die abgegebenen Blätter **zusammentackern** und alle mit **Namen und Übungsgruppennummer** versehen.

Das Übungsblatt 4 wird am 02. 11. 2017 auf der Veranstaltungsseite veröffentlicht werden.

Aufgabe 1 (direkter und indirekter Beweis, 14 Punkte):

Benutzen Sie 2 verschiedene Beweismethoden, um zu zeigen, dass für beliebige $p, q \in \mathbb{R}$ und alle $\varepsilon > 0$

$$2pq \leq \frac{p^2}{\varepsilon} + \varepsilon q^2$$

gilt.

a) (7 Punkte) **Direkter Beweis:** Zeigen Sie die Behauptung direkt, d.h. starten Sie mit einer wahren Aussage und folgern Sie hieraus die Behauptung.
Hinweis: Starten Sie mit der Aussage $(p - \varepsilon q)^2 \geq 0$.

b) (7 Punkte) **Widerspruchsbeweis:** Nehmen Sie nun an, die Behauptung sei falsch, und führen Sie dies zu einem Widerspruch. Folgern Sie hieraus, dass die Behauptung stimmen muss.

Aufgabe 2 (vollständige Induktion, 16 Punkte):

Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion die nachfolgenden Aussagen:

a) (8 Punkte) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

b) **(i)** (7 Punkte) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $a > -1$ gilt:

$$(1+a)^n \geq 1 + na\,.$$

(ii) (1 Punkt) An welcher Stelle geht dabei die Voraussetzung $a > -1$ ein?

Aufgabe 3 (binomische Formeln und Faktorisierung, mündlich):

Stellen Sie mit Hilfe der binomischen Formeln die folgenden Terme als Produkte dar.

(i) $5x^2 + 3xy + y^2 + xy - x^2$

(ii) $5b^2 + 1 - 9b^2$

(iii) $16x^2 - 72xy + 81y^2$

(iv) $(2xy + 3z)^2 - 12xyz - 18z^2$

(v) $-4x^2 - 12xy - 9y^2$

Aufgabe 4 (vollständige Induktion und Binomialkoeffizient, mündlich):

Im folgenden sei n eine natürliche Zahl und $0 \leq k \leq n$ ebenfalls eine natürlich Zahl.

Gegeben seien n voneinander wohl unterscheidbare Objekte (z.B. n nummerierte Kugeln in einer Urne; verschiedene Studenten; Reagenzgläser mit Chemikalien, etc.).

Zeigen Sie mittels Induktion über n folgende Aussage:

Es gibt genau $\binom{n}{k}$ verschiedene Möglichkeiten aus den n Objekten k Objekte auszuwählen.

Hinweis für den Induktionsschritt: Unterteilen Sie die $n+1$ Objekte in n Objekte und ein gedanklich markiertes zusätzliches $(n+1)$-tes Objekt und unterschieden Sie die Fälle, ob bei Ihrer Auswahl der k Objekte das $(n+1)$-te Objekt dabei ist oder nicht.