Mathematisches Institut
der Universität zu Köln
apl. Prof. Dr. D. Horstmann
Dr. S. Littig

Wintersemester 2017/2018
01. November 2017

4. Übung zur Mathematik I für Biologie und Chemie

Abgabe der bepunkteten Aufgaben am Mittwoch den 08. 11. 2017 nach der Vorlesung. Die abgegebenen Blätter **zusammentackern** und alle mit **Namen und Übungsgruppennummer** versehen.

Aufgabe 1 (Binomialkoeffizienten und binomischer Lehrsatz, 13 Punkte):

Lisa B. hat in der Mathematik-I-Vorlesung bei Herrn H. die Binomialkoeffizienten kennengelernt und übt die Anwendung des binomischen Lehrsatzes. Um beim ständigen Neuberechnen der Binomialkoeffizienten etwas Zeit zu sparen, hat sie sich eine Tabelle angefertigt. In die Zeilen trägt sie die Werte für n ein, in die Spalten jene für k, in den einzelnen Zellen stehen die Werte der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$.

	$k=-1$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$n=0$	0	1	0	0	0	0	0	0
$n=1$	0	1						
$n=2$	0	1	2	1				
$n=3$					1			
$n=4$				6	4	1		
$n=5$		1				5	1	

(a) (3 Punkte) Helfen Sie Lisa und füllen Sie alle noch fehlenden Zellen der obigen Tabelle aus. Es reicht hier (ohne rechnerische Begründung), die Werte schlicht einzutragen.

(b) (2 Punkte) Als Lisa Ihren Übungszettel ruhen lässt, um das Zusatztutorium zu besuchen, betrachtet ihr kleiner 9jähriger Bruder Tim die Tabelle und füllt die 6-te Zeile mit den Zahlen 0, 1, 6, 15, 20, 15, 6 und 1 aus.

Als Lisa wieder kommt, ist sie erstaunt, rechnet nach und stellt fest, dass die Werte alle richtig sind. Und das, obwohl ihr Bruder von Fakultäten und Binomialkoeffizienten keine Ahnung hat. „Wie hast du das denn gemacht?“, stellt sie Tim zur Rede. „Ganz einfach“, antwortet dieser. „In der ersten Spalte stehen sowieso immer Nullen. Alle anderen Zahlen ergeben sich als Summe von der Zahl direkt darüber und der Zahl, die noch mal links davon steht.“

Lisa denkt darüber nach und stellt fest: „Richtig, das haben wir sogar in der Vorlesung behandelt, dass man das so berechnen kann“. An welche Formel hat Lisa dabei gedacht?

(c) (1 Punkt) Tim fällt auf, dass jede Zeile symmetrisch ist. Sprich die Zahlen werden erst immer größer, dann folgen die gleichen Zahlen in umgekehrter Reihenfolge. „Das muss auch so sein,“ sagt Lisa. „Dazu haben wir eine allgemeine Gesetzmäßigkeit in der Vorlesung kennen gelernt.“ Welche allgemeine Formel für die Binomialkoeffizienten meint Lisa damit?

(d) (3 Punkte) Lisa denkt nochmals über die Tabelle nach und überlegt, was sie sonst noch so in Zusammenhang mit den Binomialkoeffizienten gelernt hat. Sie erinnert sich, dass z. B. die Summe aller Binomialkoeffizienten in der n-ten Zeile gerade 2^n ist. „Wenn man weiß, dass sich jede Zelle gerade als Summe von der Zelle direkt darüber und der links-oben darüber ergibt, dann kann man die Formel für die Summe der Binomialkoeffizienten einer Zeile ja ganz leicht per vollständiger Induktion zeigen“, stellt Lisa fest.

Führen Sie den Induktionsbeweis aus, den Lisa im Blick hat, anhand des Tableauts.

(e) (4 Punkte) Nutzen Sie die Erkenntnisse von Lisa um

$$(x+1)^8$$

auszumultiplizieren.

Bemerkung: Wie in der Vorlesung nochmals erläutert, gilt für alle natürlichen Zahlen einschließlich der Null $\binom{n}{n} = 1$ und für $k \neq 0$ ist $\binom{0}{k} := 0$ definiert.

Aufgabe 2 (binomischer Lehrsatz, mündlich):

Lösen Sie folgende Potenzen auf und fassen Sie so weit wie möglich zusammen. Alle auftretenden Variablen seien dabei reelle Zahlen.

(i) $(2a+2b)^3$	**(iii)** $(2+\sqrt{2})^4$	**(v)** $\left((1+x)^3-(x-1)^3\right)^4$
(ii) $\left(\frac{x}{2}-1\right)^5$	**(iv)** $\left(\alpha^2-\sqrt{2}\beta\right)^4$	**(vi)** $\left(\frac{1}{x}-x\right)^4 \quad (x \neq 0)$

Aufgabe 3 (Induktion, 9 Punkte):

Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen n *außer* $n = 3$ und $n = 4$ die Abschätzung

$$n! \geq n^3 - 2n^2$$

gilt. *Hinweis:* Für $n \geq 5$ könnte es sinnvoll sein Potenzen der Form n^k nach unten durch $5n^{k-1}$ abzuschätzen.

Aufgabe 4 (Induktion, binomischer Lehrsatz, 8 Punkte):

Zeigen, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ die Zahl

$$m^5 - m$$

durch 5 teilbar ist.

Zur Erinnerung: Eine ganze Zahl a heißt durch 5 teilbar, wenn es eine andere ganze Zahl b gibt, so dass $a = 5 \cdot b$. Sie dürfen den aus der Schule bekannten (und leicht beweisbaren) Sachverhalt, dass die Summe zweier durch 5 teilbaren Zahlen ebenfalls durch 5 teilbar ist, voraussetzen.

Bemerkung: Diese Tatsache ist von allgemeinerer Natur. Der kleine Fermatsche Satz besagt, dass für jede Primzahl p und jede natürliche Zahl m die Differenz $m^p - m$ durch p teilbar ist. 2017 ist eine Prinzahl, also ist z. B. die (ziemlich große) Zahl $2018^{2017} - 2018$ durch 2017 teilbar.