apl. Prof Dr. D. Horstmann **Wintersemester 2017/2018**

7. Übung zur Vorlesung
"Mathematik I für Studierende der Biologie und der Chemie"

Abgabe der bepunkteten Aufgaben am Mittwoch den 29. 11. 2017 nach der Vorlesung. Bitte tackern Sie die abzugebenden Übungsblätter zusammen und schreiben Sie Ihren Namen und die Übungsnummer auf die Blätter.

1. Aufgabe (schriftlich): Berechnen Sie jeweils die Determinante der nachfolgenden Matrizen:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad b)\ B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -15 & 6 \end{pmatrix}$$

$$c)\ C = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad d)\ D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche dieser Matrizen sind invertierbar, d.h. besitzen eine Inverse? Begründen Sie kurz. Bestimme zu den Matrizen aus a) und c) jeweils die Inverse.

13 Punkte

2. Aufgabe (schriftlich): Bestimmen Sie zu den gegebenen Matrizen die jeweilige Inverse:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad b)\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Es sei I die $(n \times n)$-Einheitsmatrix mit $n \in \mathbb{N}$.
Wie lautet die zu I inverse Matrix?

10 Punkte

3. Aufgabe (schriftlich): Ein Wald bestehe nur aus Eichen und Fichten. Mit E_t sei die Anzahl an Eichen und mit F_t die Anzahl an Fichten in dem Wald im Jahr t bezeichnet. Wenn ein Baum stirbt, so wachse ein neuer Baum an derselben Stelle, doch kann dieser durchaus einer anderen Baumspezies angehören als der abgestorbene Baum. Wir nehmen im speziellen an, dass Eichen relativ gesehen länger leben und nur 2% des Eichenbestandes in einem Jahr stirbt. Andererseits nehmen wir an, dass 6% des Fichtenbestandes in einem Jahr absterben. Da Fichten jedoch schneller als Eichen wachsen, werden an frei werdenden Baumstandorten eher Fichten wachsen. Wir nehmen also weiter an, dass 70% der frei werdenden Baumstandorte von Fichten besetzt werden und nur 30% von Eichen.

(a) Geben Sie ein Gleichungssystem an, mit dem sich der Wald bzw. die jeweiligen Baumanzahlen im Jahr $t+1$ beschreiben lässt bzw. lassen.

(b) Wie sieht der Baumbestand im Jahr 3 aus, wenn $E_1 = 150$ und $F_1 = 350$ sind?

(c) Schreiben Sie Ihr Gleichungssystem aus (a) nun in Matrixschreibweise.

(d) Geben Sie mithilfe von (c) in Matrixschreibweise an, wie sich der Wald bzw. die jeweiligen Baumanzahlen im Jahr $t+n$ in Abhängigkeit der Baumanzahlen im Jahr t beschreiben lässt bzw. lassen!

7 Punkte

4. Aufgabe (mündlich): Berechnen Sie die Lösungen der nachfolgenden Gleichungssysteme, indem Sie jeweils die Inversen der Matrizen berechnen und bei der Ermittlung der Lösung verwenden:

$$a)\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{14}{5} \\ -\frac{5}{7} & \frac{12}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix}$$

5. Aufgabe (mündlich): Es seien die folgenden Matrizen gegeben:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Überprüfen Sie mittels des Kriteriums aus der Vorlesung vom 22.11.17, ob die jeweiligen Spaltenvektoren der obigen Matrizen linear unabhängig sind.

(b) Angenommen Sie bilden mit den obigen Matrizen nun jeweils ein Gleichungssystem der Form $Ax = b$, wobei die Spaltenvektoren x und b jeweils die passende Anzahl von Spaltenelementen besitzen sollen, zum Beispiel ist bei $A_1 x = b$ die Matrix x ein Spaltenvektor mit 3 Einträgen und b ein Spaltenvektor mit 2 (beliebigen) Einträgen, da A_1 eine (2×3)-Matrix ist.

Beantworten Sie nun die folgenden Fragen:

Liegt für eins der beiden gebildeten Gleichungssysteme eine eindeutige Lösbarkeit vor? Wenn ja, für welches Gleichungssystem? Welche Rolle spielt hierbei die Wahl der jeweiligen Einträge des Spaltenvektors b?

Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe der Aussagen aus der Vorlesung!