

12. Übung zur Vorlesung
“Mathematik I für Studierende der Biologie und der Chemie”

Abgabe der bepunkteten Aufgaben am Mittwoch den 17.01.2018 nach der Vorlesung. Bitte tackern Sie die abzugebenden Übungsblätter zusammen und schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer der Übungsgruppe auf die Blätter.

1. Aufgabe: Berechnen Sie die nachfolgenden Integrale:

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx, \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{\sqrt{x} + x^{1+\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx, \quad \text{c) } \int_0^2 x 2^x dx.$$

6 Punkte

2. Aufgabe: Bestimmen Sie mit Hilfe partieller Integration eine Stammfunktion zu:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int x^2 e^{3x} dx, & \text{b) } & \int \cos^2(x) dx, & \text{c) } & \int x^3 \sin(x) dx, \\ \text{d) } & \int x^\alpha \ln(x) dx, & & & & \text{wobei } x > 0 \text{ und } \alpha \in \mathbb{R} \text{ sei.} \end{aligned}$$

12 Punkte

3. Aufgabe: Bestimmen Sie mit Hilfe der angegebenen Substitutionen die nachfolgenden Integrale:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx & & \text{(Substituieren Sie } x = \sin(u)), \\ \text{b) } & \int \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx & & \text{(Substituieren Sie } u = e^{-x}). \end{aligned}$$

4 Punkte

4. Aufgabe (mündlich): Betrachten Sie die Funktionen, die durch die folgenden Funktionsvorschriften gegeben sind:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sin(x), & f_2(x) &= \ln(1+x), \\ g_1(x) &= \ln(\cos(x)), & g_2(x) &= \ln(\cos(\pi x)). \end{aligned}$$

- (a) Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich der Funktionen f_1 , f_2 und geben Sie für die Funktionen g_1 , g_2 jeweils einen Punkt an, der **nicht** im Definitionsbereich liegt. Begründen Sie hierbei kurz.
- (b) Untersuchen Sie die Funktion f_2 und die Funktion g_1 auf deren Monotonieverhalten. Betrachten Sie hierbei bei der Funktion f_2 den gesamten Definitionsbereich und bei der Funktion g_1 nur das Intervall $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. **Tipp:** Verwenden Sie das Monotoniekriterium aus der Vorlesung. Geben Sie jeweils die Intervalle an, in denen die Funktionen steigen und die Intervalle, in denen die Funktionen fallen.
- (c) Berechnen Sie mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}.$$