apl. Prof Dr. D. Horstmann **Wintersemester 2017/2018**

13. Übung zur Vorlesung
"Mathematik I für Studierende der Biologie und der Chemie"

Abgabe der bepunkteten Aufgaben am Mittwoch den 24.01.2018 nach der Vorlesung. Bitte tackern Sie die abzugebenden Übungsblätter zusammen und schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer der Übungsgruppe auf die Blätter.

1. Aufgabe (schriftlich): Die Methode der Trennung der Variablen

(a) Bestimmen Sie die Lösung(en) zu folgenden Differentialgleichungen

$$\text{i) } y'(t) = -3ty(t) \qquad \text{ii) } y'(t) - 2ty(t) + 6t = 0.$$

(b) Finden Sie die Lösung(en) der nachfolgenden Anfangswertaufgaben

i. $u'(t) - 3\sin(t) \cdot u(t) + 6\sin(t) = 0, \quad u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$
(Dies ist eine alte Klausuraufgabe!)

ii. $u'(x) - \alpha u(x)(\beta - u(x)) = 0, \quad u(0) = u_0 \ (\alpha, \beta > 0)$.
Hinweis: Hier wird eine Partialbruchzerlegung der Form

$$\frac{1}{\alpha s(\beta - s)} = \frac{A}{\alpha s} + \frac{B}{\beta - s}$$

benötigt. Die in dieser Aufgabe angegebene Differentialgleichung nennt man auch *die logistische Gleichung*.

10 Punkte

2. Aufgabe (schriftlich): Die Methode der Variation der Konstanten
Bestimmen Sie die Lösung(en) zu folgenden Differentialgleichungen

(a) $u'(t) = -3u(t) + e^t$.

(b) $u'(t) = -4u(t) + \sin(t)$. (Hinweis: Bei dieser Aufgabe wird es nötig sein, partiell (vielleicht mehrmals) zu integrieren.)

10 Punkte

3. Aufgabe (schriftlich): Um 1920 stellte R. Pearl experimentell fest, dass die Änderungsrate dP/dt einer Population von Fruchtfliegen (Drosophila) mit der Populationsgröße der Gleichung

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{5}P - \frac{1}{5175}P^2 \quad (t \text{ in Tagen gemessen}) \tag{1}$$

zusammenhängt.

(a) Zeigen Sie, dass die Population der Fruchtfliegen ständig wächst, aber niemals mehr als 1035 Mitglieder hat.

(b) Bei welcher Populationsgröße und am wievielten Tag beginnt die Wachstumsrate abzunehmen?
Tipp: Überlegen Sie sich, inwiefern Sie die Differentialgleichung (1) nutzen können.

10 Punkte

4. Aufgabe (mündlich): Am 01.11.1986 kam es am Rhein zu einem Giftdesaster. Die Verseuchung des Wassers durch Chemikalien war durch den Brand einer Lagerhalle eines Baseler Chemiekonzerns ausgelöst worden. Wir wollen nun eine derartige Verschmutzung eines Fliegewässers vereinfacht modellieren. Hierfür nehmen wir an, dass ein Fluss geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit in x-Richtung fliet. An der Stelle $x = 0$ wird nun kontinuierlich ein Giftstoff eingeleitet, der sich an der Einleitstelle sofort völlig mit dem Flusswasser vermischt und dort eine (zeitunabhängige) Konzentration c_0 bewirkt. Der Fremdstoff wird mit der Rate k bestandsproportional abgebaut. Wenn eine hinreichend lange Zeit nach der Einleitung verstrichen ist, stellt sich ein stationärer (also zeitlich unabhängiger) Verlauf der Giftstoffkonzentration ein, die über den Flussquerschnitt als konstant angenommen wird.

(a) Wie lässt sich die Konzentration des Giftstoffes als eine Funktion der Ortsvariablen x ausdrücken?

(b) Um welchen Typ einer Differentialgleichung handelt es sich hier und mit welchem Verfahren lässt sich die Gleichung lösen?

(c) Geben Sie die Lösung der Differentialgleichung an!

5. Aufgabe (mündlich): Zeigen Sie, dass die Funktion $u(x) = \frac{(x-1)}{x^2+4}$ die Differentialgleichung

$$u'(x) = -u^2(x) + \frac{5}{(x^2+4)^2} \text{ löst.}$$