

**14. Übung zur Vorlesung
“Mathematik I für Studierende der Biologie und der Chemie”**

Die Übungsaufgaben werden in der ersten Übungsstunde des Sommersemesters in den jeweiligen vorlesungsbegleitenden Übungsgruppen zu den Vorlesungen “Mathematik II für Studierende der Biologie” und “Mathematik II für Studierende der Chemie” besprochen.

1. Aufgabe: Ansatz vom Typ der rechten Seite

- (a) Bestimmen Sie die Lösung(en) zu folgenden Differentialgleichungen
- i. $u''(t) - 3u(t) = e^t \cos(t)$.
 - ii. $u''(t) + 2u(t) = t^2 \sin(2t)$.
- (b) Finden Sie die Lösung der nachfolgenden Anfangswertaufgabe
- i. $u''(t) + 2u'(t) - 3u(t) = \sin(t)$
mit Anfangswerten $u(0) = \frac{191}{65}$ und $u'(0) = -\frac{74}{65}$.

2. Aufgabe:

Bestimmen Sie die Lösung des nachfolgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems:

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ e^{3t} \end{pmatrix},$$

indem Sie

- (a) zunächst die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen,

- (b) die Lösung der homogenen Gleichung angeben,
(c) eine Lösung des inhomogenen Systems mit dem Ansatz

$$Y(x) = \begin{pmatrix} a + b \cdot e^{3t} \\ c + d \cdot e^{3t} \end{pmatrix}$$

ermitteln,

- (d) die allgemeine Lösung des Systems angeben. Hierbei versteht man unter der allgemeinen Lösung die Summe der Lösung des inhomogenen Systems und der Lösung des homogenen Systems.

3. Aufgabe:

- (a) Ein Tank K_1 enthalte 100ℓ Wasser, in dem 5 kg Salz aufgelöst sind, ein Tank K_2 300ℓ Wasser mit 5 kg Salz. Beginnend zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ werden pro Minute ständig 10ℓ Salzlösung von K_1 nach K_2 und 10ℓ von K_2 nach K_1 gepumpt und sofort verrührt. Wie groß ist der Salzgehalt $m_i(t)$ in K_i zur Zeit $t > 0$? Auf welchem Niveau stabilisiert sich schließlich der Salzgehalt in K_i ?
- (b) Jeder der beiden Tanks K_1, K_2 enthalte 100ℓ Wasser, in dem 5 kg bzw. 2 kg Salz aufgelöst seien. Beginnend mit der Zeit $t_0 = 0$ soll in K_1 pro Minute 1 Liter einer Salzlösung der Konzentration $0,1 \text{ kg} / \ell$ eingeleitet werden, ferner sollen $2 \ell / \text{Minute}$ von K_1 nach K_2 , $1 \ell / \text{Minute}$ von K_2 nach K_1 herübergepumpt und $1 \ell / \text{Minute}$ aus K_2 in einen Abfluß gelenkt werden. Wie groß ist der Salzgehalt $m_i(t)$ in K_i zur Zeit $t > 0$? Zeigen Sie, daß die Salzkonzentration in K_i gegen die Konzentration der eingeleiteten Lösung strebt.

4. **Aufgabe:** Um Mitternacht wird die Polizei zum Schauplatz eines grausigen Verbrechens gerufen. Der einschlägig polizeibekannt Schurke Eddi, genannt *das Wiesel*, liegt erschlagen auf der Kölner Dom-Platte. Der hinzugezogene Gerichtsmediziner stellt bei Eddis Leiche eine Körpertemperatur von 30° Celsius fest. Die Umgebungstemperatur beträgt laue 20° Celsius . Die Spurensicherung benötigt zwei Stunden, um den Tatort genauestens zu untersuchen, so dass die Leiche erst um 2 Uhr morgens in die Gerichtsmedizin geschafft werden kann. Vor dem Transport misst der Mediziner noch einmal die Temperatur der Leiche. Er schreibt 24° Celsius in sein Protokoll. Nach nervenzerreibenden Zeugenvernehmungen, die die ganze Nacht hindurch gedauert haben, schlägt die Polizei am folgenden Tag zu: Verhaftet unter Mordverdacht wird Eddis Ex-Geliebte Lola. Lola war am Abend vor dem Mord Gast in der Bar "Die Absteige", in der sie unter Alkoholeinfluss wüste Morddrohungen gegen Eddi ausstieß. Um 23.15 Uhr hat sie die Bar unter wildesten Flüchen verlassen.

Bei der weiteren Untersuchung spielt der genaue Todeszeitpunkt eine wesentliche Rolle. Der Gerichtsmediziner verwendet bei seiner Berechnung die **Newtonsche Abkühlungsregel**:

Die Geschwindigkeit der Abkühlung ist proportional zur Temperaturdifferenz zwischen Körper und Umgebung.

Ist Lola schuldig? Wann starb Eddi?

Hinweise: Gehen Sie von einer Differentialgleichung der Art $T'(t) = -k \cdot (T(t) - T_U)$ aus (Begründung?), wobei T_U die Umgebungstemperatur bezeichne. Lösen Sie die Gleichung mit den Ihnen bekannten Methoden und ermitteln Sie zunächst den durch die Anfangsbedingung festgelegten Wert für die Integrationskonstante. Ermitteln Sie anschließend den Wert für k mit Hilfe der obigen Daten. Wenn Sie schließlich davon ausgehen, dass die Körpertemperatur eines lebendigen Menschen ca. 37° Celsius beträgt, können Sie die Fragen in der Aufgabenstellung beantworten.