Dictaat behorende bij

Analyse III

Wiskunde Opleiding Delft-Leiden

versie 2005-2006

Guido Sweers en Sjoerd Verduyn Lunel

Universiteit Leiden

TU Delft
Technische Universiteit Delft

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

CONVERGENTIE VAN GETALRIJEN

In dit hoofdstuk wordt een beknopt overzicht gegeven van definities met betrekking tot convergentie van rijen in $\mathbb{R}$ en enkele criteria voor convergentie.

1.1 Convergente rijen

Definitie 1.1.1 *Zij (a_n) een rij in $\mathbb{R}$ en zij $a \in \mathbb{R}$. (a_n) convergeert naar a als er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat $|a_n - a| < \varepsilon$ voor alle $n \geq N$. Men noteert dan*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \textit{of} \qquad a_n \to a \quad (n \to \infty)$$

en het getal a heet de limiet van de rij (a_n). Een rij die convergeert heet convergent. Een rij die niet convergent is heet divergent.

Een convergente rij heeft precies één limiet. In plaats van '(a_n) is convergent' zegt men ook wel dat de *limiet van (a_n) bestaat.* Ter herinnering enkele van de belangrijkste rekenregels voor limieten:

als (a_n) en (b_n) rijen in $\mathbb{R}$ zijn en $c \in \mathbb{R}$, dan

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} ca_n &= c \lim_{n\to\infty} a_n, \\ \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n, \\ \lim_{n\to\infty} a_n b_n &= \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n, \\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}, \end{aligned}$$

mits de limieten in de rechterleden bestaan en bovendien voor de laatste formule $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Van sommige divergente rijen zeggen we dat de limiet ∞ is:

Definitie 1.1.2 *Zij (a_n) een rij in $\mathbb{R}$. (a_n) heeft limiet ∞ (resp. $-\infty$), notatie*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \textit{(resp. } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\textit{)},$$

als er voor iedere $M > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat met $a_n \geq M$ (resp. $a_n \leq -M$) voor alle $n \geq N$.

Bij Definitie 1.1.1 denken we aan 'steeds kleinere ε', hier denken we aan 'steeds grotere M'. Als $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ zeggen we NIET dat (a_n) naar ∞ convergeert of dat (a_n) convergent is; deze termen reserveren we voor het geval van Definitie 1.1.1. Men zegt soms wel dat (a_n) *divergeert naar* ∞ als $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

De voorwaarde voor convergentie van Definitie 1.1.1 is niet altijd gemakkelijk te verifiëren. Het is daarom nuttig om andere criteria voor convergentie te hebben. Zulke criteria worden gegeven in Stelling 1.3.2, Stelling 1.4.8 en Stelling 1.5.4. Voor hun formulering is een aantal nieuwe begrippen nodig.

Tenslotte introduceren we nog het begrip *deelrij*:
$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is een deelrij van $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als er een strikt stijgende rij natuurlijke getallen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bestaat zodanig dat $a_{n_k} = b_k$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Met andere woorden: we kunnen (b_n) verkrijgen door een aantal elementen uit (a_n) te verwijderen. Zorg wel dat er oneindig veel overblijven en dat de volgorde niet verandert.

Voorbeeld 1.1.3 Neem $a_n = \frac{1}{n+1}$ en $b_n = \frac{1}{2n+1}$. Dan is (b_n) een deelrij van (a_n).
Is $(\frac{1}{n!})$ een deelrij van $(\frac{1}{n+1})$?

1.2 Suprema en infima

Bekijk de verzameling $V = \{1 - 1/n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$. 0 is het kleinste element van V. Immers, voor elke $v \in V$ geldt $v \geq 0$. V heeft geen grootste element. Het getal 1 speelt een rol die wel vergelijkbaar is met die van een grootste element. Het is dan wel geen element van V, maar het is wel groter dan of gelijk aan de elementen van V en het is het kleinste getal dat boven V ligt. Zo'n getal heet het supremum van V. Hier zijn de formele definities.

Definitie 1.2.1 *Zij V een verzameling reële getallen. Een getal a heet een* bovengrens *van V als $v \leq a$ (let op het gelijkteken) voor alle $v \in V$. Een getal b heet een* ondergrens *van V als $v \geq b$ voor alle $v \in V$.*

Als er een bovengrens voor V bestaat heet V naar boven begrensd *en als er een ondergrens voor V bestaat heet V* naar onderen begrensd*. Als V zowel naar boven als naar onderen begrensd is, dan heet V kortweg* begrensd.

Definitie 1.2.2 *Zij V een verzameling reële getallen. Als V een kleinste bovengrens heeft, dan heet dit getal het supremum (of gewoon kleinste bovengrens) van V, notatie* $\sup V$. *Als V een grootste ondergrens heeft, dan heet dit het infimum van V, notatie* $\inf V$.

Opmerking 1.2.3 Als $\sup V$ bestaat en zelf element van V is, dan heeft V dus een grootste element. In dat geval heet $\sup V$ het *maximum* van V, wat we noteren met $\max V$. Evenzo, als $\inf V$ zelf element van V is, dan heeft V dus een kleinste element. In dat geval heet $\inf V$ het *minimum* van V, wat we noteren met $\min V$.

Het belang van de begrippen sup en inf hangt samen met de volgende fundamentele eigenschap van $\mathbb{R}$.

Stelling 1.2.4 (Supremumstelling) *Iedere niet-lege naar boven begrensde verzameling reële getallen heeft een supremum.*

Een bewijs van deze stelling vergt een precieze beschrijving van de reële getallen. Deze is in deze cursus niet voor handen en we nemen de stelling daarom aan als één van de eigenschappen van de reële getallen.

De supremumstelling is equivalent met

Stelling 1.2.5 (Infimumstelling) *Iedere niet-lege naar onderen begrensde verzameling reële getallen heeft een infimum.*

Soms zijn de volgende notaties handig.

Notatie 1.2.6 *Zij V een verzameling van reële getallen. Als V niet naar boven begrensd is schrijven we* $\sup V = \infty$ *en we schrijven* $\inf V = -\infty$ *als V niet naar onderen begrensd is. Soms schrijft men voor de lege verzameling* $\sup \emptyset = -\infty$ *en* $\inf \emptyset = \infty$.

1.3 Monotone rijen

Een rij reële getallen heet *monotoon* als hij stijgend of dalend is. Het taalgebruik in de literatuur over (strikt) stijgend, niet-dalend etc. is niet helemaal eenduidig. Wij spreken het volgende af.

Definitie 1.3.1 *Zij (a_n) een rij in $\mathbb{R}$.*

(i) De rij (a_n) heet stijgend *(of* niet dalend*) als voor alle n geldt: $a_{n+1} \geq a_n$. Notatie $(a_n) \uparrow$.*

(ii) De rij (a_n) heet dalend *(of* niet stijgend*) als voor alle n geldt: $a_{n+1} \leq a_n$. Notatie $(a_n) \downarrow$.*

(iii) De rij (a_n) heet strikt stijgend *als voor alle n geldt: $a_{n+1} > a_n$. Hiervoor hebben we geen speciale notatie.*

(iv) De rij (a_n) heet strikt dalend *als voor alle n geldt: $a_{n+1} < a_n$. Ook hiervoor hebben we geen speciale notatie.*

De supremumstelling (Stelling 1.2.4) leidt tot een convergentiecriterium voor monotone rijen.

Stelling 1.3.2 (Monotone convergentiestelling)
Iedere stijgende naar boven begrensde rij convergeert.
Een stijgende onbegrensde rij divergeert naar ∞.

Opmerking 1.3.3 Vanzelfsprekend zijn er analoge resultaten voor dalende rijen.

Bewijs. De tweede helft van de stelling is onmiddellijk duidelijk. We bewijzen daarom alleen dat een stijgende naar boven begrensde rij convergeert. Zij (a_n) zo'n rij. De verzameling $V = \{a_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ (het bereik van de rij) is dan een naar boven begrensde verzameling en dus bestaat volgens de supremumstelling het getal

$$S = \sup V.$$

We tonen aan dat $S = \lim a_n$. Laat daartoe $\varepsilon > 0$. Dan is $S - \varepsilon$ géén bovengrens van V (want S is de kleinste bovengrens en $S - \varepsilon < S$). Maar dan moet er een getal in V zijn dat groter is dan $S - \varepsilon$, zeg a_N. Omdat de rij (a_n) stijgt is dan zeker $a_n > S - \varepsilon$ voor alle $n > N$. Anderzijds is S een bovengrens voor V, dus $a_n \leq S < S + \varepsilon$ voor alle n. Dus

$$S - \varepsilon < a_n < S + \varepsilon$$

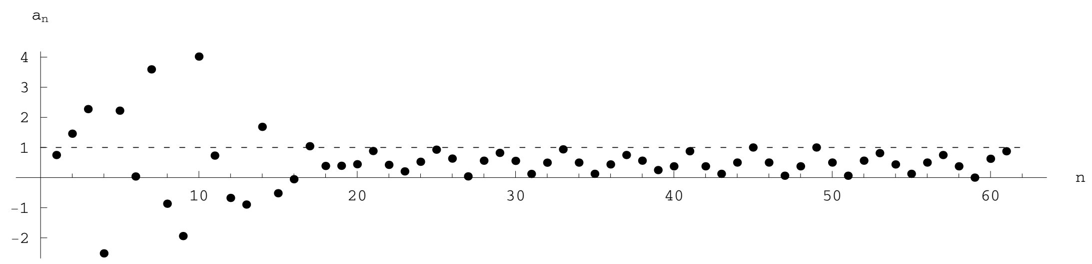
voor alle $n > N$, waaruit volgt dat $\lim a_n = S$. $\square$

1.4 Boven- en onderlimieten

In het voorgaande is gesproken over convergente rijen en hun limieten. Deze paragraaf gaat over een soort limietgedrag van niet-convergente rijen. Wat hiermee wordt bedoeld is te zien aan de rij (a_n) gegeven in Figuur 1.1.

De rij is niet convergent, maar toch is er een soort limietgedrag te zien: aan de bovenkant gaat de rij naar 1 en aan de onderkant naar 0. Hoe beschrijft men zoiets precies? Bekijk eerst 'de bovenkant'. Laat (a_n) een begrensde rij zijn in $\mathbb{R}$. Voor $n \in \mathbb{N}$ bestaat volgens de supremumstelling (Stelling 1.2.4) het supremum van de staart vanaf n: $u_n := \sup_{k \geq n} a_k$. De rij (u_n) is dalend en naar onderen begrensd en heeft dus volgens de monotone-convergentiestelling (Stelling 1.3.2) een limiet: $a^* := \lim_{n\to\infty} u_n = \inf_{n\geq 1} u_n$. a^* heet de *bovenlimiet* of *limes superior* van de rij (a_n):

$$a^* = \limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} a_k.$$



Figuur 1.1: Een rij (a_n) met lim sup gelijk aan 1.

Op dezelfde manier spreekt men van *onderlimiet* of *limes inferior*:

$$a_* = \liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} a_k.$$

Soms is het handig om ook notaties voor onbegrensde rijen te hebben. Als (a_n) alleen maar naar boven begrensd is, dan krijgen we nog steeds een rij (u_n) die dalend is, maar die hoeft niet meer naar onderen begrensd te zijn. In dat geval is zijn limiet $-\infty$ (zie Definitie 1.1.2) en schrijven we $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Als (a_n) niet naar boven begrensd is, dan is $\sup_{k\geq n} a_k = \infty$ voor elke n. In zo'n geval schrijven we $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$. We kunnen voor deze gevallen vasthouden aan de formule $\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} a_k$ als we afspreken dat $\inf_{n\geq 1} \infty = \infty$. Om voor alle gevallen notaties te hebben spreken we af dat we de conventies van Notatie 1.2.6 gebruiken en voegen er aan toe:

$$\sup_{n\geq 1} \infty = \infty, \quad \sup_{n\geq 1} -\infty = -\infty, \quad \inf_{n\geq 1} \infty = \infty, \quad \inf_{n\geq 1} -\infty = -\infty.$$

Samenvattend:

Definitie 1.4.1 *Zij (a_n) een rij in $\mathbb{R}$. De bovenlimiet van (a_n) is:*

$$a^* = \limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} a_k$$

en de onderlimiet is

$$a_* = \liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} a_k,$$

indien nodig met de bovenstaande conventies.

Voorbeeld 1.4.2 Zij $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Voor $n \in \mathbb{N}$ is $u_n = \sup_{k\geq n} a_k = 1$, dus

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} u_n = 1$$

en $l_n = \inf_{k\geq n} a_k = -1$ voor alle n, dus

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} l_n = -1.$$

Voorbeeld 1.4.3 Bereken $\limsup_{n\to\infty} a_n$ met $a_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$. We vinden

$$\begin{aligned}
\{a_n\}_{n=1}^{\infty} &= \{-2, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{4}{3}, \tfrac{5}{4}, -\tfrac{6}{5}, \tfrac{7}{6}, -\tfrac{8}{7}, \tfrac{9}{8}, -\tfrac{10}{9}, \tfrac{11}{10}, -\tfrac{12}{11}, \tfrac{13}{12}, -\tfrac{14}{13}, \tfrac{15}{14}, -\tfrac{16}{15}, \dots\},\\
\{\sup_{k\ge n} a_k\}_{n=1}^{\infty} &= \{\ \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2},\ \tfrac{5}{4}, \tfrac{5}{4},\ \tfrac{7}{6}, \tfrac{7}{6},\ \tfrac{9}{8}, \tfrac{9}{8},\ \tfrac{11}{10}, \tfrac{11}{10},\ \tfrac{13}{12}, \tfrac{13}{12},\ \tfrac{15}{14}, \tfrac{15}{14},\ \tfrac{17}{16}, \dots\}.
\end{aligned}$$

Omdat de limiet van deze laatste rij 1 is, volgt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\ge n} a_k\right) = 1.$$

Voorbeeld 1.4.4 Zij $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Dan

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\ge 1}\sup_{k\ge n} k = \inf_{n\ge 1}\infty = \infty$$

en

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\ge 1}\inf_{k\ge n} k = \sup_{n\ge 1} n = \infty.$$

Voorbeeld 1.4.5 Zij $a_n = n + (-1)^n n$, $n \in \mathbb{N}$. Dan $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$ en $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$.

Het is niet altijd nodig en soms zelfs onmogelijk om de u_n en l_n expliciet uit te rekenen. Goede afschattingen voldoen gelukkig ook.

Voorbeeld 1.4.6 Zij

$$a_n = \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^2 \sin^2\left(\tfrac{9\pi n}{11}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(Dit is de rij van figuur 1.1!). Zij $n \in \mathbb{N}$. Voor $k \ge n$ geldt:

$$a_k = \left(1 + \tfrac{2}{k^2}\right)^2 \sin^2\left(\tfrac{9\pi k}{11}\right) \le \left(1 + \tfrac{2}{k^2}\right)^2 \le \left(1 + \tfrac{2}{n^2}\right)^2$$

en er is een $k \ge n$ met $a_k \ge 1$ (neem k een oneven veelvoud van $\frac{1}{2} \times 11$). Dus $u_n = \sup_{k\ge n} a_k \le 1 + 1/n$ en $u_n \ge 1$ en daarom $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$.

Ga zelf na dat $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$.

De volgende propositie geeft enkele elementaire eigenschappen van boven- en onderlimieten.

Propositie 1.4.7 *Zij (a_n) een rij in $\mathbb{R}$.*

(i) Voor $c \ge 0$ geldt:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} c a_n &= c \limsup_{n\to\infty} a_n\\
\liminf_{n\to\infty} c a_n &= c \liminf_{n\to\infty} a_n.
\end{aligned}$$

(ii) Voor $c \leq 0$ geldt:

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} ca_n &= c \liminf_{n\to\infty} a_n \\ \liminf_{n\to\infty} ca_n &= c \limsup_{n\to\infty} a_n. \end{aligned}$$

(iii) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Er geldt in het algemeen NIET dat $\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$, zoals te zien is met $a_n = (-1)^n$ en $b_n = (-1)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Boven- en onderlimieten geven een criterium voor convergentie.

Stelling 1.4.8 *Zij (a_n) een rij in $\mathbb{R}$. Dan is (a_n) convergent als en alleen als*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \qquad \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

en in dat geval is $\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

Bewijs. Neem aan dat (a_n) convergent is en noem de limiet a. Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ voor alle $n \geq N$. Dan geldt voor elke $n \geq N$ dat $u_n := \sup_{k\geq n} a_k \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ en $l_n := \inf_{k\geq n} a_k \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$. Dus $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} l_n = a = \lim_{n\to\infty} u_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

Omgekeerd, neem aan dat $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $u_n := \sup_{k\geq n} a_k \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ en $l_n := \inf_{k\geq n} a_k \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ voor alle $n \geq N$. Dit geeft dat voor $n \geq N$ geldt dat $a_n \leq \sup_{k\geq n} a_k < a+\varepsilon$ en $a_n \geq \inf_{k\geq n} a_k > a-\varepsilon$, ofwel $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Dus (a_n) convergeert naar a. □

De toevoeging '$\in \mathbb{R}$' in formule (4.1) sluit de gevallen ∞ en $-\infty$ uit. De rij (a_n) is dan niet convergent. Er geldt trouwens wel dat (a_n) limiet ∞ respectievelijk $-\infty$ heeft.

1.5 Cauchy-rijen in $\mathbb{R}$

Gegeven een rij (a_n) in $\mathbb{R}$ en een getal $a \in \mathbb{R}$ kan met Definitie 1.1.1 worden nagegaan of (a_n) naar a convergeert. Als a niet bekend is, kan men dan ook aan de a_n zelf zien of (a_n) convergeert? Deze paragraaf laat zien dat dat inderdaad mogelijk is.

Definitie 1.5.1 *Een rij (a_n) in $\mathbb{R}$ heet een Cauchy-rij als er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat $|a_m - a_n| < \varepsilon$ voor alle $m \geq N$ en $n \geq N$.*

Figuur 1.2: Cauchy, 1789-1857.

Voorbeeld 1.5.2 Laat de rij (a_n) gegeven zijn door $a_{n+1} = a_n + 2^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$ en $a_1 = 1$. Dan geldt voor $m, n \in \mathbb{N}$ met $m \geq n$:

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - \cdots + a_{n+1} - a_n| \leq |a_m - a_{m-1}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| = \\ &= 2^{-(m-1)} + \cdots + 2^{-n} \leq 2^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-n+1}. \end{aligned}$$

(Wat te doen als $m < n$?)

Voor elke $\varepsilon > 0$ is er een $N \in \mathbb{N}$ met $2^{-n+1} < \varepsilon$ voor alle $n \geq N$ en dan is dus $|a_m - a_n| < \varepsilon$ voor alle $m, n \geq N$. Dus (a_n) is een Cauchy-rij.

Voorbeeld 1.5.3 Zij $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ en $a_1 = 1$. Ga na dat (a_n) geen Cauchy-rij is, hoewel twee opeenvolgende elementen wel steeds dichter bij elkaar liggen.

Stelling 1.5.4 *Zij (a_n) een rij in $\mathbb{R}$. Dan is (a_n) convergent als en alleen als (a_n) een Cauchy-rij is.*

Bewijs. Neem aan dat (a_n) convergent is en noem de limiet a. Zij $\varepsilon > 0$. Neem $N \in \mathbb{N}$ zo dat $|a_n - a| < \varepsilon/2$ voor alle $n \geq N$. Dan geldt voor alle $m, n \geq N$ dat $|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \varepsilon$. Dus (a_n) is een Cauchy-rij.

Neem nu aan dat (a_n) een Cauchy-rij is. Zij $\varepsilon > 0$. Neem $N \in \mathbb{N}$ zo dat $|a_m - a_n| < \varepsilon$ voor alle $m, n \geq N$. Dan (neem $m = N$) $a_N - \varepsilon < a_n < a_N + \varepsilon$ voor alle $n \geq N$, dus $\sup_{n \geq N} a_n \leq a_N + \varepsilon$ en $\inf_{n \geq N} a_n \geq a_n \geq a_N - \varepsilon$. Dit geeft dat $\limsup_{n \to \infty} a_n =$

$\inf_{m\geq 1}\sup_{n\geq m} a_n \leq \sup_{n\geq N} a_n \leq a_N + \varepsilon$ en, net zo, $\liminf_{n\to\infty} a_n \geq a_N - \varepsilon$. Samen met Propositie 1.4.7 levert dit $0 \leq \limsup_{n\to\infty} a_n - \liminf_{n\to\infty} a_n \leq 2\varepsilon$. Hieruit volgt dat $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$. Stelling 1.4.8 geeft nu dat (a_n) convergent is. □

Het belangrijkste deel van de stelling formuleren we nog eens expliciet.

Stelling 1.5.5 *Elke Cauchy-rij in $\mathbb{R}$ is convergent.*

Men kan de uitspraak van deze laatste stelling opvatten als een eigenschap van $\mathbb{R}$. Deze eigenschap heet de *volledigheid* van $\mathbb{R}$.

1.6 Opgaven

In de volgende opgaven is (s_n) een rij van reële getallen.

Opg. 1 Zij $m = \sup\{s_n \mid n \geq 1\} < \infty$, en veronderstel dat het supremum niet wordt aangenomen. Bewijs dat $\limsup_{n\to\infty} s_n = m$.

Opg. 2 Veronderstel dat (s_n) een begrensde rij is. Voer in

$$t_n = \sup\{s_k \mid k \geq n\}.$$

Bewijs dat de rij (t_n) monotoon dalend is en convergent. Zij $t = \lim_{n\to\infty} t_n$. Ga na welke van de volgende beweringen juist is:

a. $t = \liminf_{n\to\infty} s_n$,

b. $t = \limsup_{n\to\infty} s_n$.

Opg. 3 Veronderstel dat $s_n > 0$ voor iedere $n \in \mathbb{N}$. Bewijs

a. $\liminf_{n\to\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{s_n}$,

b. $\limsup_{n\to\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} \geq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{s_n}$.

Opg. 4 Zij $\sigma_n = n^{-1}(s_1 + \ldots + s_n)$. Bewijs

a. $\liminf_{n\to\infty} s_n \leq \liminf_{n\to\infty} \sigma_n$,

b. $\limsup_{n\to\infty} s_n \geq \limsup_{n\to\infty} \sigma_n$.

Opg. 5 Zij (t_n) een convergente rij van reële getallen met limiet $t > 0$. Bewijs dat

$$\limsup_{n\to\infty} t_n s_n = t \limsup_{n\to\infty} s_n.$$

Is deze bewering ook juist als $t = 0$? Hoe zou de bewering moeten luiden als $t < 0$?

Opg. 6 Laat $0 < r < 1$ en beschouw de rij (a_n) gegeven door

$$a_n = \begin{cases} r^{\frac{n}{2}}, & n \text{ even} \\ r^{\frac{n-1}{2}}, & n \text{ oneven} \end{cases}$$

Bepaal $\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, $\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ en $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Opg. 7 Stel (a_n) en (b_n) zijn reële rijen met $a_n \leq b_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Laat zien dat

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n \quad \text{en} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Gebruik dit en Stelling 1.4.8 om de *insluitstelling* te bewijzen.

Stelling 1.6.1 (Insluitstelling) *Stel (a_n), (b_n) en (c_n) zijn reële rijen met $a_n \leq b_n \leq c_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Als $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$, dan geldt dat $\lim_{n\to\infty} b_n$ bestaat en bovendien*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Opg. 8 Gegeven zijn de rijen (a_n) en (b_n) met

$$a_n = \tan(\frac{n\pi}{3}), \quad b_n = \tan((n^2+1)\frac{\pi}{3n}).$$

Bereken de limes superior en limes inferior van de rijen (a_n), (b_n), $(|a_n|)$ en $(|b_n|)$.

Opg. 9 Zij (s_n) een rij reële getallen. Bewijs dat $\limsup_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$ als en alleen als voor alle $\varepsilon > 0$ geldt:

a. $s_n > s - \varepsilon$ voor oneindig veel waarden van n én

b. er bestaat een $N = N(\varepsilon)$ zó dat $s_n < s + \varepsilon$ voor alle $n \geq N$

Opg. 10 Zij (u_n) en (v_n) twee rijen reële getallen.

a. Laat zien dat $\limsup_{n\to\infty}(u_n + v_n) \leq \limsup_{n\to\infty} u_n + \limsup_{n\to\infty} v_n$, tenzij het rechterlid van de vorm $\infty - \infty$ is.

b. Stel $u_n, v_n \geq 0$ en $u = \limsup_{n\to\infty} u_n > 0$ en $v = \limsup_{n\to\infty} v_n > 0$. Toon aan dat $\limsup_{n\to\infty} u_n v_n \leq uv$. Geldt deze ongelijkheid ook als u of v gelijk is aan 0 of ∞?

Opg. 11 Bereken

a. $\limsup\limits_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$,

b. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)$,

c. $\limsup\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re}\left((-2)^{4-n} + e^{i\frac{\pi}{2}n}\right)$,

d. $\limsup\limits_{n\to\infty} (-1)^n (-1 + \arctan n)$.

En wat verwacht u bij $\limsup\limits_{n\to\infty} \sin n$?

Opg. 12 Gegeven zijn twee begrensde rijen reële getallen (a_n) en (b_n). Neem aan dat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ bestaat en dat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq 0$. Laat zien dat geldt:

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \ \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Opg. 13 Geef twee begrensde rijen reële getallen (a_n) en (b_n) zodat

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n b_n) \neq \limsup_{n\to\infty} a_n \ \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Opg. 14 Laat zien dat het product van twee Cauchy-rijen in $\mathbb{R}$ een Cauchy-rij is. D.w.z. als (a_n) en (b_n) Cauchy-rijen zijn in $\mathbb{R}$, dan is de rij (c_n) gedefinieerd door $c_n = a_n b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ een Cauchy-rij.

Opg. 15 Zij (a_n) een rij in $\mathbb{R}$ en zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue functie. Laat zien: als (a_n) een Cauchy-rij is, dan is $(f(a_n))$ een Cauchy-rij.

Hoofdstuk 2

HET COMPLEXE VLAK

In dit hoofdstuk worden de complexe getallen ingevoerd.

2.1 Representaties van complexe getallen

Op de vectorruimte $\mathbb{R}^2$ met de componentsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \qquad r(x_1, y_1) = (rx_1, ry_1),$$

waarbij $x_1, x_2, y_1, y_2, r \in \mathbb{R}$, definiëren we een vermenigvuldiging als volgt:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

Deze vermenigvuldiging is associatief en commutatief en voor $r, x, y \in \mathbb{R}$ geldt dat $(r, 0) \cdot (x, y) = (rx, ry)$, zodat vermenigvuldiging met $(r, 0)$ overeenkomt met scalaire vermenigvuldiging met r. De getallenparen (x, y) met $x, y \in \mathbb{R}$ met de vectorruimte-optelling en de boven gedefinieerde vermenigvuldiging vormen de verzameling van de complexe getallen. Deze verzameling noteren we als $\mathbb{C}$. De verzameling reële getallen $\mathbb{R}$ vormt een deelverzameling van $\mathbb{C}$ door het getallenpaar $(r, 0)$ te identificeren met het reële getal r. Voor $(0, 1)$ schrijven we i en dan kunnen we $(x, y) = (x, 0) + y(0, 1)$ schrijven als $x + iy$. Dan geldt $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. In termen van de nieuwe notatie wordt optellen en vermenigvuldigen

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

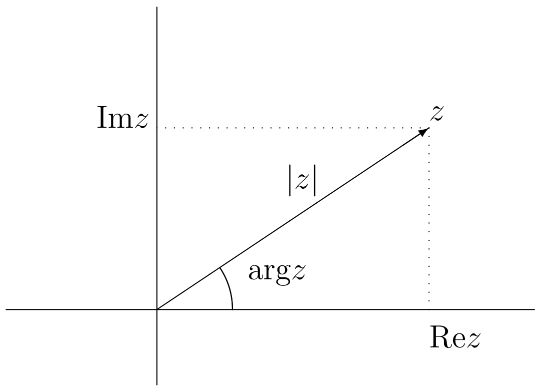
Voor de vermenigvuldiging geldt dus de distributieve eigenschap.

Bij een complex getal $z = x + iy$ noemen we x het *reële deel* van z (notatie $x = \mathrm{Re}\ z$) en y het *imaginaire deel* van z (notatie $y = \mathrm{Im}\ z$). De complexe getallen kunnen we in een vlak tekenen door $x + iy$ te identificeren met het punt (x, y). De x-as wordt in dit verband de reële as genoemd en de y-as heet de imaginaire as. Het geheel van de puntenparen (x, y) beschouwd als complexe getallen vormt het "complexe vlak".

In termen van poolcoördinaten (r, ϕ) geldt $x = r\cos\phi$ en $y = r\sin\phi$ en het complexe getal $z = x + iy$ schrijven we dan als

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi).$$

De uitdrukking $\cos\phi + i\sin\phi$ noteren we als $e^{i\phi}$ of als $e^{\phi i}$. Voor $\phi = 0$ is dus $e^{i\cdot 0} = e^0 = 1$ en ook is $e^{2k\pi i} = 1$ voor $k \in \mathbb{Z}$. Nu geldt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $\tan\phi = y/x$. r heet de *modulus* van z (notatie $r = |z|$) en ϕ heet het *argument* van z (notatie $\phi = \arg z$). Zie Figuur 2.1. Het argument van een complex getal ligt op 2π na vast. Voor de waarde van het argument dat in het interval $(-\pi, \pi]$ gebruiken we Arg met hoofdletter. Dus $\mathrm{Arg} : \mathbb{C}\backslash\{0\} \mapsto (-\pi, \pi]$ is een functie.



Figuur 2.1: Argument en modulus van z.

Merk op dat $|e^{i\phi}| = \sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi} = 1$. De getallen $z = e^{i\phi}$ liggen op een cirkel in het complexe vlak met middelpunt 0 en straal 1, de eenheidscirkel. Verder geldt, m.b.v. de optelformules voor sinus en cosinus,

$$\begin{aligned} e^{i\phi}\cdot e^{i\psi} &= (\cos\phi + i\sin\phi)(\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi + i(\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\psi) \\ &= \cos(\phi+\psi) + i\sin(\phi+\psi) \;=\; e^{i(\phi+\psi)}. \end{aligned}$$

De complexe getallen $e^{i\phi}$ gedragen zich dus wat vermenigvuldigen betreft als reële getallen van de vorm e^x. Door de bovenstaande eigenschap herhaald toe te passen vinden we:

Lemma 2.1.1 (de formule van de Moivre) *Voor $n \in \mathbb{Z}$ geldt:*

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = (e^{i\phi})^n = e^{in\phi} = (\cos n\phi + i\sin n\phi) \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Door reële en imaginaire delen te nemen vinden we formules voor $\cos n\phi$ en $\sin n\phi$:

$$\begin{aligned}\cos 3\phi &= \mathrm{Re}\,(\cos 3\phi + i\sin 3\phi)\\ &= \mathrm{Re}\,(\cos\phi + i\sin\phi)^3\\ &= \mathrm{Re}\,(\cos^3\phi + 3i\cos^2\phi\sin\phi - 3\cos\phi\sin^2\phi - i\sin^3\phi)\\ &= \cos^3\phi - 3\cos\phi\sin^2\phi\end{aligned}$$

en door in de laatste term $\sin^2\phi = 1 - \cos^2\phi$ te substitueren volgt

$$\cos 3\phi = 4\cos^3\phi - 3\cos\phi$$

en analoog

$$\sin 3\phi = \sin\phi \cdot (4\cos^2\phi - 1).$$

Algemeen is zo in te zien dat

$$\begin{aligned}\cos n\phi &= 2^{n-1} \cdot T_n(\phi)\\ \sin n\phi &= 2^{n-1} \cdot \sin\phi \cdot U_{n-1}(\cos\phi)\end{aligned}$$

met T_n en U_n monische polynomen van graad n. De polynomen T_n heten de *Chebyshevpolynomen van de eerste soort* en de polynomen U_n heten de *Chebyshevpolynomen van de tweede soort.*

Zij $z = x + iy$ een complex getal. De *complex geconjugeerde* $\overline{z}$ is gedefinieerd als $\overline{z} = x - iy$, de gespiegelde van z in de reële as. Er gelden de volgende rekenregels:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}. \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2. \qquad |z| = |\overline{z}|.$$

$$\mathrm{Re}\ z = (z + \overline{z})/2. \qquad \mathrm{Im}\ z = (z - \overline{z})/2i.$$

Daar $|z| \neq 0$ als $z \neq 0$ kunnen we voor $z \neq 0$ door z delen

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

en vervolgens is voor $w \in \mathbb{C}$ het quotiënt w/z gedefinieerd als

$$\frac{w}{z} = w \cdot \frac{1}{z} = \frac{w\overline{z}}{|z|^2}.$$

Er geldt dan $(w/z) \cdot z = w$. Bijvoorbeeld

$$\left(\frac{i-1}{i+1}\right) = \left(\frac{(i-1)(i-1)}{(i-1)(i+1)}\right) = \frac{-2i}{-2} = i.$$

Voorbeeld 2.1.2 Beschouw de verzameling complexe getallen z die voldoen aan

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \;=\; 2.$$

Schrijf $z = x + iy$ en kwadrateer. Uit $|x + iy - 1|^2 = 4|x + iy + 1|^2$ volgt

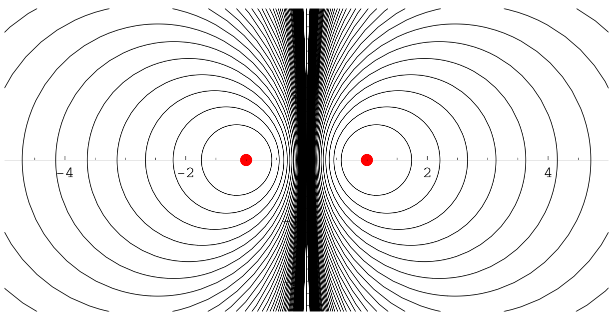
$$(x-1)^2 + y^2 = 4((x+1)^2 + y^2).$$

Dit is te herleiden tot de tweedegraadsvergelijking $3x^2 + 10x + 3y^2 + 3 = 0$ ofwel

$$(x + 5/3)^2 + y^2 = 16/9.$$

Dit een cirkel in $\mathbb{C}$ met middelpunt $z = -5/3$ en straal $4/3$.

In het algemeen liggen de punten X in het vlak waarvan de afstanden XP en XQ tot twee vaste punten P en Q een vaste verhouding $a \neq 0, 1$ hebben op een cirkel. Als we P en Q vast nemen en $a > 0$ variëren krijgen we zo een cirkelbundel (samen met de middelloodlijn van P en Q voor $a = 1$). De cirkels in deze bundel heten de *cirkels van Apollonius* bij de punten P en Q. Zie Figuur 5.1.



Figuur 2.2: De cirkels van Apollonius voor $P = (-1, 0)$ en $Q = (1, 0)$.

2.2 Meetkundige constructies

Optelling

De optelling is de vectoroptelling in $\mathbb{R}^2$ (parallellogramconstructie): Laat in het complexe vlak de punten O, Z en W corresponderen met de complexe getallen $0, z$ en w. Het hoekpunt Y van het parallellogram $OZYW$ correspondeert dan met de som $w + z$. De driehoeksongelijkheid geldt voor $w, z \in \mathbb{C}$:

$$\big||z| - |w|\big| \;\leq\; |z + w| \;\leq\; |z| + |w|. \tag{1.1}$$

Vermenigvuldiging

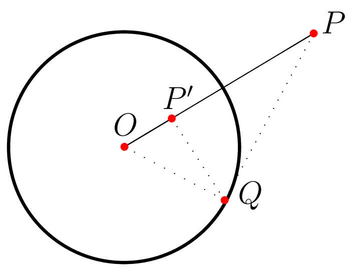
Aangezien $z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\phi} \cdot r_2 e^{i\psi} = r_1 r_2 \cdot e^{i(\phi+\psi)}$ volgt

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2| \\ \arg(z_1 \cdot z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2 (\bmod 2\pi). \end{aligned}$$

De volgende constructie kunnen we nu toepassen: Laat O, E, Z en W de punten in het complexe vlak zijn die corresponderen met de complexe getallen $0, 1, z$ en w. Laat P het punt zijn zodat ΔOEZ gelijkvormig is met ΔOWP terwijl de orientatie van beide driehoeken hetzelfde is. Dan correspondeert P met het produkt $z \cdot w$.

Inversie

(spiegeling in een cirkel). Laat C een cirkel met middelpunt O en straal R in het vlak zijn, en P een punt in het vlak. Als P op C ligt is het beeld van inversie van P in de cirkel C, P zelf. Als P buiten de cirkel ligt, trek dan de lijn OP en een van de raaklijnen uit P aan de cirkel. Deze raaklijn raakt C in een punt Q. Trek vanuit Q de loodlijn op OP en laat P' het voetpunt zijn. Dan is P' het beeld van P onder inversie in C. Als P binnen C ligt, trek dan vanuit P de loodlijn op OP. Deze snijdt C in Q en Q'. Trek de raaklijn aan C vanuit Q. Deze snijdt OP in P', het beeld van P onder inversie in C. Merk op dat inversie van O niet gedefinieerd is en dat tweemaal inversie toepassen gelijk is aan de identieke afbeelding. Onder inversie wordt het binnengebied van C (m.u.v. O) afgebeeld op het buitengebied en omgekeerd. D.m.v. gelijkvormigheid van driehoeken is in te zien dat $OP \cdot OP' = R^2$. Zie Figuur 2.3.



Figuur 2.3: Spiegeling in de eenheidscirkel.

Nu kunnen we $1/z$ construeren uit z: laat Z het punt in het complexe vlak zijn dat correspondeert met z. Inversie in de eenheidscirkel levert het punt $\hat{Z}$ dat correspondeert met het complexe getal $z/|z|^2$. Spiegeling in de reële as van $\hat{Z}$ geeft vervolgens Z_0, dat correspondeert met $1/z = \overline{z}/|z|^2$.

2.3 Veeltermen en vergelijkingen

Laat $a_0, a_1, \ldots, a_n$ complexe getallen en $a_n \neq 0$. Volgens de Hoofdstelling van de algebra (Gauss, 1799) heeft het n-de graads polynoom $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ voor $n > 0$ altijd een nulpunt in $\mathbb{C}$, d.w.z. er is een $\alpha \in \mathbb{C}$ zodat $P(\alpha) = a_n \alpha^n + \ldots + a_1 \alpha + a_0 = 0$. Het bewijs van deze stelling zal in het college Analyse 4 worden gegeven.

Een direct gevolg is het volgende resultaat.

Propositie 2.3.1 *Zij P een polynoom van graad n met complexe coëfficiënten. Dan heeft P in $\mathbb{C}$ precies n nulpunten, met multipliciteit geteld, d.w.z. er zijn $\alpha_1, a_2, \ldots \alpha_n$ zodat $P(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (z - \alpha_n)$.*

Bewijs. We gebruiken inductie naar n. Voor $n = 0$ is $P(z) = a_0$ en $a_0 \neq 0$, dus er zijn geen nulpunten. Zij dus $n > 0$. Volgens de hoofdstelling van de algebra heeft P zeker een nulpunt α_1. Staartdelen van $P(z)$ naar $z - \alpha_1$ levert nu $P(z) = (z - \alpha_1)Q(z) + b$ met Q een polynoom van graad $n - 1$ en $b \in \mathbb{C}$. Daar $P(\alpha_1) = 0$ is $b = 0$. Volgens de inductieveronderstelling zijn er complexe getallen a_n en $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ zodat $Q(z) = a_n(z - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (z - \alpha_n)$ en dus is $P(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (z - \alpha_n)$. Het is nu duidelijk dat $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nulpunten van P zijn en dat P geen andere nulpunten heeft. $\square$

Figuur 2.4: Gauss, 1777-1855.

Definitie 2.3.2 *De orde of multipliciteit van een nulpunt α van P is het aantal keren dat $z - \alpha$ als factor van P voorkomt.*

We beschouwen nu polynomen met reële coëfficiënten, dus $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ met $a_0, \ldots a_n \in \mathbb{R}$. Laat $\alpha \in \mathbb{C}$. Dan is

$$\begin{aligned} P(\overline{\alpha}) &= a_n \overline{\alpha}^n + \ldots + a_1 \overline{\alpha} + a_0 = \overline{a_n} \overline{\alpha}^n + \ldots + \overline{a_1} \overline{\alpha} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n \alpha^n + \ldots + a_1 \alpha + a_0} = \overline{P(\alpha)}. \end{aligned}$$

In het bijzonder is $\overline{\alpha}$ een nulpunt van P als α een nulpunt van P is. Dus geldt:

$$P(z) = a_n (z - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (z - \alpha_k)(z - \beta_1)(z - \overline{\beta_1}) \cdot \ldots \cdot (z - \beta_\ell)(z - \overline{\beta_\ell})$$

waarbij $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ de reële nulpunten van P en $\beta_1, \ldots \overline{\beta_\ell}$ de niet-reële nulpunten van P zijn. Daar verder $(z - \beta)(z - \overline{\beta}) = z^2 - 2\text{Re }(\beta)z + |\beta|^2$ reële coëfficiënten heeft, zien we dat een polynoom met reële coëfficiënten te ontbinden is in reële factoren van graad 1 en graad 2 (de laatste dus zonder reëel nulpunt).

Gevolg 2.3.3 *Een reëel polynoom van oneven graad heeft altijd een (reëel) nulpunt. Zo'n polynoom heeft immers minstens een reële factor $z - \alpha$ van graad 1, en in dat geval is α een nulpunt.*

In Analyse 1 hebben we gezien hoe we de volgende vergelijking kunnen oplossen.

De vergelijking $z^n = \alpha$.

In het algemeen bestaat er geen methode om de nulpunten van een polynoom van graad n te vinden. Wel zijn er voor kleine n oplossingsmethoden, zoals de *abc*-formule voor $n = 2$. Ook voor $n = 3, 4$ (maar niet voor $n > 4$) kunnen de nulpunten d.m.v. optelling, vermenigvuldiging en worteltrekking worden uitgedrukt in de coëfficiënten van het polynoom. Een belangrijk type polynomen waarvan we de nulpunten wel kunnen bepalen, zijn de polynomen van de vorm $z^n - \alpha$ voor α een complex getal. We onderscheiden hierbij twee gevallen:

1. Voor $\alpha = 0$ heeft $z^n = 0$ alleen $z = 0$ als oplossing. Het punt $z = 0$ is een nulpunt van z^n met multipliciteit n.

2. Voor $\alpha \neq 0$, schrijven we $z = |z| \cdot e^{i \arg z}$ en $\alpha = |\alpha| \cdot e^{i \arg \alpha}$. Dan is

$$z^n = |z|^n \cdot e^{in \arg z}.$$

   Vergelijken van de moduli geeft $|z|^n = |\alpha|$. Dit is een reële vergelijking. De oplossing is $|z| = \sqrt[n]{|\alpha|}$. Argumenten vergelijken geeft $n \arg z = \arg \alpha + k \cdot 2\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$, dus $\arg z = (\arg \alpha + k \cdot 2\pi)/n$. Dit geeft n verschillende oplossingen (nl. voor $k = 0, 1, \ldots, n - 1$. $k = n$ geeft weer dezelfde z als $k = 0$ enz.).

Voor $\alpha \neq 0$ liggen alle nulpunten van $z^n - \alpha$ dus op een cirkel met middelpunt 0 in $\mathbb{C}$ en straal $\sqrt[n]{|\alpha|}$. Deze nulpunten vormen de hoekpunten van een regelmatige n-hoek.

De n-nulpunten van $z^n - 1$ heten de n-*de machtseenheidswortels*.

Voorbeeld 2.3.4 Los op $z^4 = -1$.

Schrijf -1 eerst in poolcoördinaten: $z^4 = 1 \cdot e^{i\pi} = 1 \cdot e^{i\pi + ik\cdot 2\pi}$. Dan

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt[4]{1} = 1 \\ \arg z &= \pi/4 + k \cdot \pi/2 \quad (k = 0, 1, 2, 3). \end{aligned}$$

De oplossingen zijn dus

$$z = e^{i\pi/4}, \quad e^{3i\pi/4}, \quad e^{5i\pi/4}, \quad e^{7i\pi/4}$$

ofwel, in Cartesische coördinaten,

$$z = \pm\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\ \pm\ \frac{1}{2}i\sqrt{2}.$$

De ontbinding in reële factoren van $z^4 + 1$ krijgen we door de complex geconjugeerde nulpunten samen te nemen:

$$\begin{aligned} z^4 + 1 &= (z - e^{i\pi/4})(z - e^{-i\pi/4})(z - e^{3i\pi/4})(z - e^{-3i\pi/4}) \\ &= (z^2 - 2\mathrm{Re}\ e^{i\pi/4} z + 1)(z^2 - 2\mathrm{Re}\ e^{3i\pi/4} z + 1) \\ &= (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1). \end{aligned}$$

2.4 Enkele topologische begrippen

In deze paragraaf introduceren we een aantal topologische begrippen die we nodig zullen hebben in het vervolg van het college. Wat volgt is een lijst van definities.

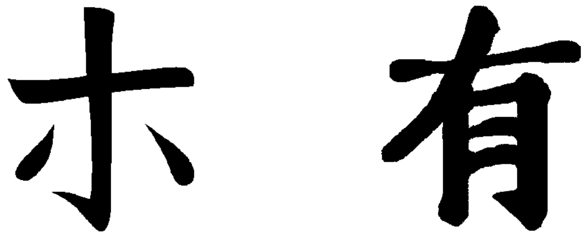
De verzameling punten $z \in \mathbb{C}$ zodat $|z - p| < \epsilon$ voor $p \in \mathbb{C}$ en $\epsilon > 0$ noemen we een *ϵ-omgeving* van p. We noteren deze verzameling als $U_\epsilon(p)$. Als we uit $U_\epsilon(p)$ het punt p weglaten noemen we de overblijvende verzameling $U_\epsilon(p)\backslash\{p\}$ een *gereduceerde* of *gepunkteerde ϵ-omgeving* van p.

Laat U een deelverzameling van $\mathbb{C}$ zijn. $p \in \mathbb{C}$ heet een *inwendig punt* van U als er een $\epsilon > 0$ bestaat zodat $U_\epsilon(p)$ geheel in U ligt. In het bijzonder is dan $p \in U$. Als elke ϵ-omgeving van p zowel punten van U als van het complement U^c bevat, noemen we p een *randpunt* van U. Een punt p dat noch een inwendig punt, noch een randpunt van U is, heet een *uitwendig punt* van U. De randpunten van U vormen de *rand* van U, notatie ∂U. Een uitwendig punt van U is een inwendig punt van U^c. p heet een *verdichtingspunt* van U als elke gereduceerde ϵ-omgeving van p minstens een punt van U bevat. Randpunten die geen verdichtingspunt van U zijn, heten *geïsoleerde punten* van U.

De verzameling U heet *open* als U louter inwendige punten bevat. Het complement van een open verzameling heet *gesloten*. Een equivalente definitie is: U heet gesloten als U al zijn verdichtingspunten bevat. De lege verzameling en $\mathbb{C}$ zijn de enige deelverzamelingen van $\mathbb{C}$ die zowel open als gesloten zijn. Een open verzameling die een punt p bevat heet een *(open) omgeving* van p. Laat $U \subset \mathbb{C}$. De *afsluiting* $\overline{U}$ is de vereniging van U met zijn rand. Het is de kleinste gesloten verzameling die U bevat.

Een deelverzameling U van $\mathbb{C}$ heet *begrensd* als U bevat is in een ϵ-omgeving $U_\epsilon(0)$ voor zekere $\epsilon > 0$ (die nu wel eens erg groot kan zijn). Een verzameling $U \subset \mathbb{C}$ die zowel gesloten als begrensd is, heet *compact.*

Twee verzamelingen V en W heten *disjunct* als de doorsnede $V \cap W$ leeg is. Een open verzameling U heet *splitsbaar* als er disjunkte niet-lege, open verzamelingen V en W zijn zodat $U = V \cup W$. Een open verzameling die niet splitsbaar is heet *samenhangend.* Een open samenhangende verzameling noemen we ook wel een *gebied.*



Figuur 2.5: Niet samenhangend en samenhangend

Laat $p, q \in \mathbb{C}$. Het *segment* $\text{seg}(p, q)$ is het gerichte lijnstuk dat p en q verbindt, dus

$$\text{seg}(p, q) = \{p(1-t) + qt : \; t \in [0, 1]\}.$$

Punt p heet het beginpunt en q heet het eindpunt van het segment. Een *lijnentrek* tussen p en q is een eindige vereniging van segmenten $\text{seg}(p, \alpha_1) \cup \text{seg}(\alpha_1, \alpha_2) \cup \ldots \cup \text{seg}(\alpha_k, q)$. Er geldt:

Propositie 2.4.1 *Een open verzameling $U \subset \mathbb{C}$ is samenhangend dan en slechts dan als er tussen elk tweetal punten $p, q \in U$ een lijnentrek bestaat die geheel binnen U ligt.*

Opmerking 2.4.2 De in deze paragraaf gegeven definities kunnen zonder meer op de vectorruimten $\mathbb{R}^n$ worden overgedragen. In plaats van de modulus $|z|$ komt dan de norm $\| \; \|$ gedefinieerd als $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, waarbij $x_1, \ldots, x_n$ de componenten van de vector $\mathbf{x}$ zijn t.o.v. een orthonormale basis. Als $z \in \mathbb{C}$, $z = x+iy$, dan is $|z| = \|(x, y)\|$ voor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Topologische begrippen kunnen zo zonder meer van $\mathbb{C}$ op $\mathbb{R}^2$ (en omgekeerd) worden overgedragen: ϵ-omgevingen in $\mathbb{C}$ zijn ϵ-omgevingen in $\mathbb{R}^2$ als we $z = x + iy \in \mathbb{C}$ met $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ identificeren. De andere in deze paragraaf gegeven definities zijn gebaseerd op het begrip $\epsilon-$omgeving en kunnen dus eveneens direct naar $\mathbb{R}^2$ worden vertaald: zo is een open verzameling $U \in \mathbb{C}$ een open verzameling als deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ opgevat en omgekeerd.

2.5 Opgaven

Opg. 1 Schrijf de volgende uitdrukkingen als polynomen in $\cos\phi$.

a. $\cos 4\phi$ en $\sin 4\phi/\sin\phi$.

b. $\cos 6\phi$ en $\sin 6\phi/\sin\phi$.

Opg. 2 Herleid (schrijf in de vorm $z = x + iy$):

a. $\dfrac{3+i}{7-i}$.

b. $(1+i)^{12}$.

c. $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^{30}}{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^{20}}$.

Opg. 3 Teken in het complexe vlak de punten die voldoen aan:

a. $|z-2i| = 3$.

b. $|z-1| = |z-3|$.

c. $|z-2| + |z+2| = 6$.

d. $|z-2| - |z+2| = 2$.

e. $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 3$.

f. $\arg\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = \frac{\pi}{3}$.

g. $|z| = \arg z$.

h. $|z-4| = \mathrm{Re}\ z$.

i. $\mathrm{Re}\ \frac{1}{z} = 2$.

j. $\mathrm{Re}\ z^2 = 2$.

k. $\mathrm{Re}\ z + \mathrm{Im}\ z < 1$.

l. $\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

Opg. 4 Bewijs:

a. $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.

b. $|z| \le |\mathrm{Re}\ z| + |\mathrm{Im}\ z| \le \sqrt{2}|z|$.

Opg. 5 Op de zijden van een vierhoek beschrijft men buitenwaarts vier vierkanten die achtereenvolgens M_1, M_2, M_3 en M_4 als middelpunt hebben.

Bewijs: $M_1M_3 = M_2M_4$ en $M_1M_3 \perp M_2M_4$.

Laat ook zien dat als $z_1+z_2+z_3 = 0$ en $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ dan zijn z_1, z_2 en z_3 de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek met de eenheidscirkel als omgeschreven cirkel.

Opg. 6 Los op in $\mathbb{C}$:

a. $(z-2i)^4 = -8+8i\sqrt{3}$.

b. $z^6+7z^3-8=0$.

c. $z^4-4iz^2+32=0$.

d. $z^5-(1+i\sqrt{3})z^3+iz^2+\sqrt{3}-i=0$.

Opg. 7 Ontbind het polynoom z^6+7z^3-8 in reële factoren.

Opg. 8 Stel we schrijven $\sqrt{-1}=\{i,-i\}$. Geef analoog een uitdrukking voor $\sqrt[3]{i}$ (driewaardig) en $\sqrt{3+4i}$ (tweewaardig).

Merk op dat op deze wijze $\sqrt{-1}$ geen complex getal is maar een verzameling van complexe getallen. Ook de uitkomst van $\sqrt{4}$ hangt dan af van de context.

Hoofdstuk 3

COMPLEXE RIJEN EN REEKSEN

3.1 Convergentie van complexe rijen

Ook voor complexe rijen kunnen we over convergentie en divergentie spreken.

Definitie 3.1.1 *Zij* (a_n) *een rij in* $\mathbb{C}$ *en zij* $a \in \mathbb{C}$. *De rij* (a_n) *convergeert naar* a *als er voor iedere* $\varepsilon > 0$ *een* $N \in \mathbb{N}$ *bestaat zo dat* $|a_n - a| < \varepsilon$ *voor alle* $n \geq N$. *Men noteert dan*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \textit{of} \qquad a_n \to a \quad (n \to \infty)$$

Het complexe getal a *heet de limiet van de rij* (a_n).

Men kan direct laten zien dat voor een rij complexe getallen (a_n) die naar a convergeert geldt dat

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} a_n = \operatorname{Re} a \text{ en } \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} a_n = \operatorname{Im} a.$$

Ook het omgekeerde geldt. Als de reële delen en de imaginaire delen van een rij complexe getallen convergeren dan convergeert de rij.

3.2 Reeksen

Een object van de vorm $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ met $\beta_n \in \mathbb{C}$ heet een reeks. Convergentie voor reeksen in $\mathbb{C}$ wordt gedefinieerd op dezelfde wijze als voor reeksen in $\mathbb{R}$..

Definitie 3.2.1 *Zij* (b_n) *een rij in* $\mathbb{C}$. *De reeks* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *heet convergent als* $\left(\sum_{n=0}^{k} b_n\right)_k$ *een convergente rij is. Met andere woorden, wanneer* $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} b_n$ *bestaat.*

Een reeks die niet convergeert heet divergent.

Voor reeksen bestaat er daarnaast nog het begrip absoluut convergent:

Definitie 3.2.2 *Zij (b_n) een rij in $\mathbb{C}$. De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ heet absoluut convergent als $\left(\sum_{n=0}^{k} |b_n|\right)_k$ een convergente rij is.*

Lemma 3.2.3 *Een absoluut convergente reeks is convergent.*

Een reeks die niet convergent is heet *divergent*.

De limiet $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \beta_n$ wordt vaak ook geschreven als $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$. Ditzelfde symbool voor zowel het 'object' reeks als zijn mogelijke limiet levert hoogstens een schijntegenstelling:

de reeks $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n$ bestaat (als 'object' van bovenstaande vorm);

de limiet $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n$ bestaat niet (het is geen getal in $\mathbb{C}$).

Voorbeeld 3.2.4 De reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ is wel convergent maar niet absoluut convergent.

Convergentie kan men laten zien door door reëel en imaginaire delen afzonderlijk te bekijken. Men kan zelfs laten zien dat

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{i^n}{n} = \tfrac{1}{4}\pi + i\tfrac{1}{2}\log 2.$$

De reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is de zogenoemde *harmonische reeks*. Omdat deze laatste reeks divergent is, is de reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ niet absoluut convergent.

3.3 Standaard convergentiecriteria

Bij reeksen met reële getallen heeft men waarschijnlijk al van het quotiëntkenmerk en het wortelkenmerk gehoort. Ook voor complexe getallen kan men dergelijke resultaten gebruiken.

Lemma 3.3.1 (Quotiëntkenmerk)
Stel (β_n) is een rij complexe getallen en $\ell := \lim\limits_{n\to\infty} |\beta_{n+1}/\beta_n|$ bestaat.

(a) Als $\ell < 1$, dan convergeert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \beta_n$.

(b) *Als* $\ell > 1$, *dan divergeert* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \beta_n$.

Lemma 3.3.2 (Wortelkenmerk)
Stel (β_n) *is een rij complexe getallen en* $\ell := \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\beta_n|}$ *bestaat.*

(a) *Als* $\ell < 1$, *dan convergeert* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \beta_n$.

(b) *Als* $\ell > 1$, *dan divergeert* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \beta_n$.

Een zware eis voor het toepassen van een van beide criteria is het bestaan van de betreffende limiet. We zullen zien dat we het wortelkenmerk kunnen aanpassen om dit probleem te vermijden. Daarvoor zullen we de limiet vervangen door de limsup.

Voor reeksen met positieve reële coëfficiënten bestaan er nog andere kenmerken waarmee men convergentie of divergentie kan aantonen.

Lemma 3.3.3 (Vergelijkingskenmerk)
Stel (a_n) *en* (b_n) *zijn rijen van reële getallen zodanig dat* $0 \leq a_n < b_n$ *voor alle* $n \in \mathbb{R}$.

(a) *Als* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *convergeert, dan convergeert* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

(b) *Als* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergeert, dan divergeert* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.

Lemma 3.3.4 (Integraalkenmerk)
Stel (a_n) *is een dalende rij positieve reële getallen en stel er is een dalende functie* $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *zodanig dat* $f(n) = a_n$.

(a) *Als* $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ *convergeert, dan convergeert* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

(b) *Als* $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ *divergeert, dan divergeert* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Bewijs. We geven geen volledig bewijs maar merken op dat het volgende geldt:

$$\int_0^{m+1} f(x)dx \leq \sum_{n=0}^{m} a_n \leq \int_0^{m+1} f(x+1)dx \tag{3.1}$$

en gebruiken vervolgens het bovenstaande vergeljkingskenmerk. □

Dan is er ook nog een convergentiecriterium voor alternerende (dus reële) reeksen.

Lemma 3.3.5 (Kenmerk van Leibniz)
Stel (a_n) is een rij van reële getallen zodanig dat

(i) $a_n > 0$ *voor alle* $n \in \mathbb{N}$ *(positieve rij);*

(ii) $a_n > a_{n+1}$ *voor alle* $n \in \mathbb{N}$ *(dalende rij);*

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *(naar* 0 *convergerend);*

dan geldt dat $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ *convergeert.*

Bewijs. Definieer de rijen (A_m) en (B_m) door

$$A_m := \begin{cases} \sum_{n=0}^{m} (-1)^n a_n & \text{als } m \text{ is even;} \\ \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n a_n & \text{als } m \text{ is oneven;} \end{cases}$$

$$B_m := \begin{cases} \sum_{n=0}^{m+1} (-1)^n a_n & \text{als } m \text{ is even;} \\ \sum_{n=0}^{m} (-1)^n a_n & \text{als } m \text{ is oneven;} \end{cases}$$

Er geldt $A_m \geq B_m$ en men laat zien dat (A_m) daalt en (B_m) stijgt en vervolgt met ... □

3.4 Een sterker convergentiecriterium

In deze paragraaf gaan we weer verder met complexe reeksen. Met behulp van bovenlimiet (lim sup) kunnen we een uitbreiding van het wortelkenmerk formuleren.

Stelling 3.4.1 (Het uitgebreide wortelkenmerk)
Stel β_n *is een rij complexe getallen. Definieer* $\ell \in [0, \infty]$ *door* $\ell := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\beta_n|}$.

(a) Als $\ell < 1$*, dan convergeert* $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$.

(b) Als $\ell > 1$*, dan divergeert* $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$.

Opmerking 3.4.2 Voor $\ell = 1$ is niet zonder meer een conclusie voor convergentie te trekken. Bekijk maar eens de rijen met $\beta_n = \frac{1}{n+1}$ en $\beta_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Opmerking 3.4.3 Elke rij niet-negatieve reële getallen, dus ook de reële rij $\left(\sqrt[n]{|\beta_n|}\right)_{n=0}^{\infty}$ met β_n als boven, heeft een limsup in $[0,\infty]$. Daarmee is dit uitgebreide wortelkenmerk een veel sterker resultaat dan het gewone wortelkenmerk.

Bewijs. Het eerste deel. Als $\ell < 1$ dan nemen we $\ell_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ell$ en merken op dat ook geldt $\ell_0 < 1$. Uit de definitie van limsup volgt dat er een $N \in \mathbb{N}$ is zodat voor alle $n \geq N$ geldt dat $\sqrt[n]{|\beta_n|} < \ell_0$. Dan volgt dat

$$|\beta_n| < \ell_0^n \text{ voor alle } n \geq N$$

en dus voor alle $n \geq N$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} |\beta_k| &\leq |\beta_0| + |\beta_1| + \cdots + |\beta_{N-1}| + \sum_{k=N}^{n} \ell_0^k \leq \\
&\leq |\beta_0| + |\beta_1| + \cdots + |\beta_{N-1}| + \sum_{k=N}^{\infty} \ell_0^k = \\
&= |\beta_0| + |\beta_1| + \cdots + |\beta_{N-1}| + \frac{\ell_0^N}{1-\ell_0}.
\end{aligned}$$

Stijgende begrensde rijen zijn convergent[1] en dus is $\sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k|$ convergent en daarmee is $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k$ absoluut convergent en dus ook gewoon convergent.

Het tweede deel. Als $\ell > 1$ dan is er een deelrij $(\beta_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ zodat $\sqrt[n_k]{|\beta_{n_k}|} > 1$ en dus $|\beta_{n_k}| > 1$. Dan geldt niet $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$ en dus is $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k$ divergent. □

3.5 Opgaven

Opg. 1 Bewijs de volgende beweringen voor β_n in $\mathbb{C}$.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ is convergent $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$.

Merk op dat de logische omkering die hierbij hoort de volgende is:

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} \beta_n \text{ bestaat niet, of,} \\ \lim_{n\to\infty} \beta_n \neq 0 \text{ (limiet bestaat wel en is niet gelijk aan 0)} \end{array}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \text{ divergent.}}$$

[1] Zoek in uw analyse of calculus-boek naar *Monotonic Sequence Theorem.*

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n|$ is convergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ is convergent.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ is convergent $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re}\beta_n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im}\beta_n$ zijn convergent.

Opg. 2 Geef een rij $\beta_n \in \mathbb{C}$ zodat geldt $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$ én $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ is divergent.

Opg. 3 Geef een rij $\beta_n \in \mathbb{C}$, die duidelijk anders is dan in Voorbeeld 3.2.4, waarvoor geldt: $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ is convergent én $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n|$ is divergent.

Opg. 4 Is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$ divergent of convergent?

Opg. 5 Is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\sqrt{n}}$ divergent of (absoluut) convergent?

Opg. 6 Bij welke onderstaande reeksen geeft het uitgebreide wortelkenmerk uitsluitsel over convergentie of divergentie?

i. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^n}$,	*iv.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\, i^n$,	*vii.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} i^n$,
ii. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{i^n}$,	*v.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$,	*viii.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$,
iii. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\frac{1}{2}\pi n)}{2^n}$,	*vi.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{1}{2}\pi n)}{n^2}$,	*ix.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{1}{2}\pi n)}{n}$.

Opg. 7 Bepaal bij de resterende reeksen hierboven alsnog convergentie of divergentie.

Opg. 8 Completeer het bewijs van het kenmerk van Leibniz.

Hoofdstuk 4

COMPLEXE FUNCTIES

Laat S een deelverzameling van het complexe vlak $\mathbb{C}$. Door $\mathbb{C}$ te identificeren met $\mathbb{R}^2$ kunnen we S ook opvatten als een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$. Complexe functies kunnen we nu bouwen door te starten met $u : S \to \mathbb{R}$ en $v : S \to \mathbb{R}$, twee (reëelwaardige) functies gedefinieerd op S opgevat als deelverzameling van $\mathbb{R}^2$. De functie $f = u + iv : S \to \mathbb{C}$ met

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

is een *complexe* of *complexwaardige functie* op $S \subset \mathbb{C}$. De verzameling S heet het *domein* van f en de verzameling $f(S)$ van waarden $f(z)$ met $z \in S$ heet het *bereik* van f. De functie u heet het reële deel van f, en de functie v heet het imaginaire deel van f. We noteren, als voor complexe getallen, $u = \text{Re } f$ en $v = \text{Im } f$.

Voorbeeld 4.0.1 Voorbeelden van complexe functies zijn:

(1) $f(z) = z^2$.

(2) $f(z) = \text{Im } z$.

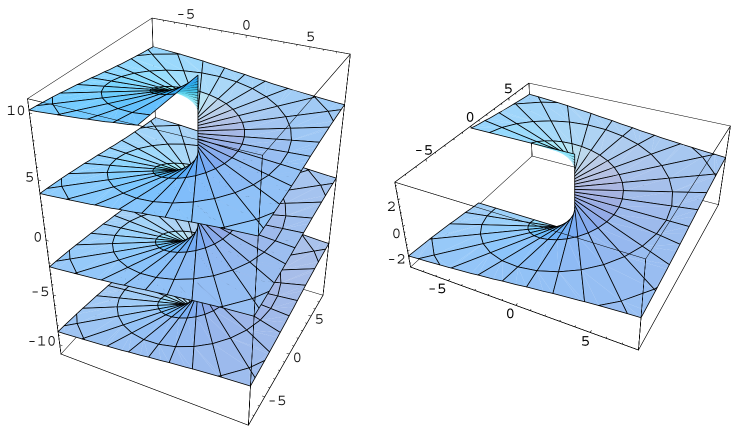
(3) $f(z) = \dfrac{z+3}{z^2+1}$.

De eerste twee functies hebben als domein $\mathbb{C}$ en de laatste heeft als domein $\mathbb{C}\backslash\{i, -i\}$.

Als $f(z) = z^2$, dan wordt $u = \text{Re } f$ gegeven door $u(x, y) = x^2 - y^2$ en het imaginaire $v = \text{Im } f$ wordt gegeven door $v(x, y) = 2xy$ (dus niet: $2ixy$).

Geen complexe functie is $f(z) = \arg z$ omdat $\arg z$ voor elke $z \neq 0$ oneindig veel waarden heeft (voor $z = 0$ is het argument niet gedefinieerd). We noemen $\arg z$ daarom wel een *meerwaardige functie* (wat eigenlijk onzuiver taalgebruik is).

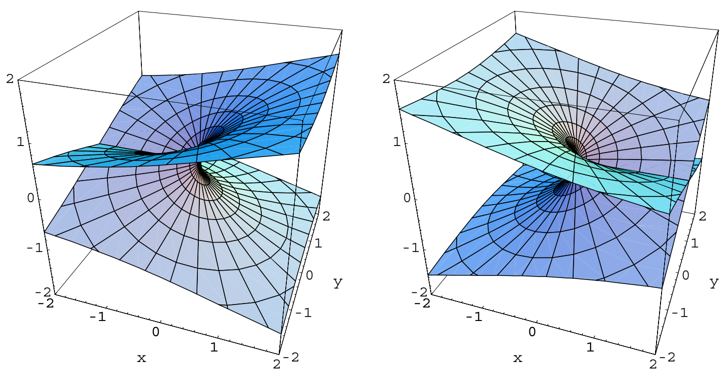
Door te eisen dat de waarde van het argument in het interval $(-\pi, \pi]$ ligt, krijgen we wel een (enkelwaardige) functie, die we noteren die functie als $\text{Arg}z$. $\text{Arg}z$ heet de *hoofdwaarde* van het argument en is gedefinieerd voor $z \neq 0$. Zie Figuur 4.1.



Figuur 4.1: Grafieken van $\arg(z)$ en $\operatorname{Arg}(z)$.

Een meerwaardige functie als $\arg z$ kunnen we dus opvatten als een collectie enkelwaardige functies. Een functie uit zo'n collectie noemen we een *tak* van de meerwaardige functie. De keuze van de takken is niet eenduidig, zoals uit het geval van $\arg z$ blijkt.

Een ander voorbeeld van een meerwaardige functie is $\sqrt{z}$. Immers $\sqrt{z}$ is tweewaardig op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$: de waarden zijn de oplossingen van $w^2 = z$. Zie Figuur 4.2.



Figuur 4.2: Het reële en imaginaire deel van de functie $f(z) = \sqrt{z}$ met $z = x + iy$.

4.1 Elementaire complexe functies.

De complexe e-macht.

Laat $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Dan definiëren we

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y).$$

De volgende eigenschappen gelden:

1. $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.
2. $\arg e^z = y \bmod 2\pi$.
3. $|e^z| = e^x = e^{\text{Re } z}$.
4. e^z heeft periode $2\pi i$: $e^{z+2\pi i} = e^z$.
5. $e^z = 1$ dan en slechts dan als $z \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

Trigonometrische en hyperbolische functies

In Hoofdstuk II hebben we e^{iy} voor $y \in \mathbb{R}$ gedefinieerd als $\cos y + i \sin y$. Hieruit volgt:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

We definiëren op dezelfde manier $\cos z$ en $\sin z$ voor $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Nu geldt: $e^{iz} = \cos z + i \sin z$. Echter voor $z \in \mathbb{C}$ zijn $|\cos z|$ en $|\sin z|$ niet langer begrensd, zoals te zien is door $z = iy$ te nemen en $y \to \pm\infty$ te laten gaan.

Met behulp van de eigenschappen voor de e-macht kunnen we de volgende optelformules voor de sinus- en cosinusfunctie afleiden

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w, \qquad \cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w.$$

Ook geldt: $\cos(-z) = \cos z$ en $\sin(-z) = -\sin z$. Verder hebben $\cos z$ en $\sin z$ periode 2π, net als de reële functies. Tenslotte geldt:

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \qquad \cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Alle nulpunten van $\sin z$ en $\cos z$ zijn dus reëel.

Andere trigonometrische functies zijn:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

en

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z}.$$

De hyperbolische functies zijn als volgt gedefinieerd:

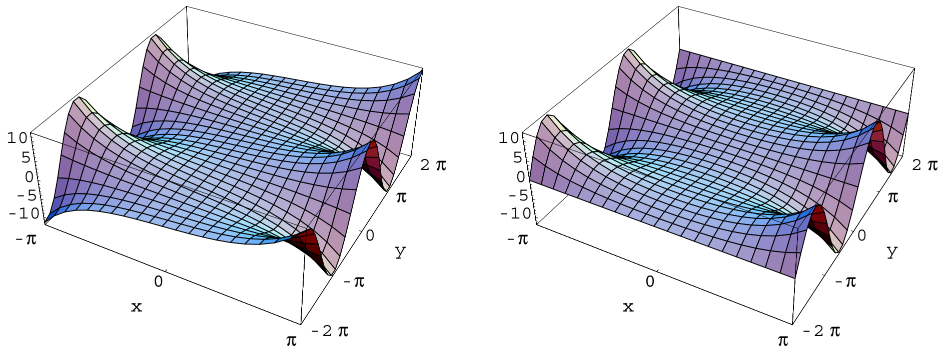
$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Voor $z \in \mathbb{R}$ is $\sinh z \in \mathbb{R}$, $\cosh z \in \mathbb{R}$. Merk op dat $\cosh z = \cos iz$ en $i \sinh z = \sin iz$ en $\cosh z = \cosh(-z)$, $\sinh z = -\sinh(-z)$. Analoog aan $\tan z, \ldots$ definiëren we nog:

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \qquad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

en

$$\text{sech } z = \frac{1}{\cosh z}, \qquad \text{csch } z = \frac{1}{\sinh z}.$$



Figuur 4.3: Het reële en imaginaire deel van de functie $f(z) = \sinh z$ met $z = x + iy$.

De complexe logaritme

De functie e^z beeldt $\mathbb{C}$ af op $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ en $e^z = e^w \Leftrightarrow z - w = 2\pi k i$ voor $k \in \mathbb{Z}$. $z \mapsto e^z$ is dus niet injectief op $\mathbb{C}$ maar wel op een horizontale strook $S_b = \{z : b < \text{Im } z \leq b + 2\pi\}$.

De complexe logaritme $\log z$ is gedefinieerd als de inverse van e^z: $\log z = w \Longleftrightarrow e^w = z$. $\log z$ is dus een meerwaardige functie met domein $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Zie Figuur 4.4. Als we het bereik beperken tot een strook S_b, dan krijgen we een tak van $\log z$. De tak die we krijgen door $b = -\pi$ te nemen, noemen we Log z, de hoofdwaarde van de logaritme. Er geldt:

$$\log z = \ln|z| + i\text{arg } z \quad \text{ en } \quad \text{Log } z = \ln|z| + i\text{Arg} z,$$

waarbij $\ln x$ de reële natuurlijke logaritme voorstelt. Verder is voor $z, w \neq 0$:

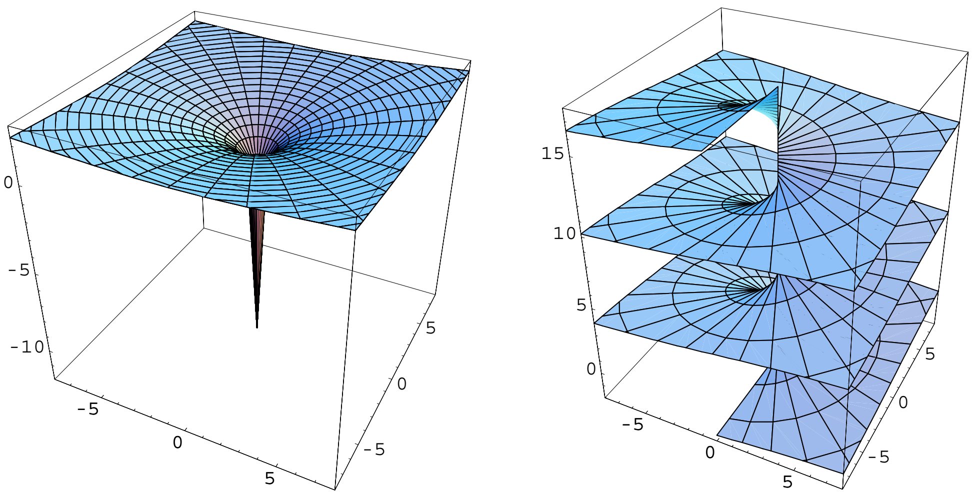
$$\log(zw) = \log z + \log w \quad \text{ en } \quad \log(z/w) = \log z - \log w.$$

Merk op dat deze identiteiten niet gelden voor Log.

Voorbeeld 4.1.1

$$\log(-1) = \ln|-1| + i\text{arg } (-1) = (\pi + k \cdot 2\pi)i \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

en Log $(-1) = \pi i$.



Figuur 4.4: Het reële en imaginaire deel van de complexe logaritme.

Machtsfuncties

Voor $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ en $\alpha \in \mathbb{C}$ wordt z^α gedefinieerd als $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$. Voor $\alpha \notin \mathbb{Z}$ levert dit een meerwaardige functie. Ga na dat voor $n \in \mathbf{N}$, de functie $z^{1/n}$ gelijk is aan de n-waardige functie $\sqrt[n]{z}$.

Voorbeeld 4.1.2

$$(-1)^i = e^{i \log(-1)} = e^{\pi + k \cdot 2\pi} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Cyclometrische en inverse hyperbolische functies

De inverse functies van de trigonometrische functies heten cyclometrische functies. Het zijn alle meerwaardige functies. Cyclometrische functies hebben het voorvoegsel *arc-* (van *arcus* “boog”):

$$\arcsin z = w \Leftrightarrow \sin w = z$$

en analoog hebben we $\arccos z$, $\arctan z$, enz. De inversen van de hyperbolische functies hebben het voorvoegsel *ar-* (van *area* “oppervlakte”): arcsinh$z$, arccosh$z$, enz. Al deze functies zijn uit te drukken m.b.v. de logaritme en de vierkantswortel

$$\begin{aligned} \arccos z &= -i \log(z + \sqrt{z^2 - 1}) \\ \arcsin z &= -i \log i(z + \sqrt{z^2 - 1}) \\ \arctan z &= \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iz}{1 - iz}. \end{aligned}$$

Analoge uitdrukkingen gelden voor de andere functies. We leiden de uitdrukking voor $\arccos z$ af:

$$\arccos z = w \Leftrightarrow z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$

zodat

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = (e^{iw} - z)^2 + 1 - z^2 = 0.$$

Dit geeft $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$ en dus

$$w = \arccos z = -i \log(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

Voorbeeld 4.1.3 Los op: $\cos z = 2$. Ga na dat de oplossing gegeven wordt door

$$\begin{aligned} z &= \arccos 2 \\ &= -i \log(2 \pm \sqrt{3}) \\ &= -i\big(\ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi i\big) = 2k\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3}) \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

4.2 Limieten en continuïteit

Zij $U \subset \mathbb{C}$ en $f : U \to \mathbb{C}$ een complexe functie met domein U. Zij verder z_0 een verdichtingspunt van U. De notatie $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ drukt uit dat de waarden $w = f(z)$ willekeurig dicht bij L liggen als we $z \in U$ dicht genoeg bij b kiezen. Preciezer

$$\lim_{z \to b} f(z) = L$$

als er voor alle $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodat $|f(z) - L| < \epsilon$ als $z \in U$ en $0 < |z - z_0| < \delta$. Laat $f = u + iv$ (dus $u = \mathrm{Re}\, f$, $v = \mathrm{Im}\, f$) en $z_0 = a_0 + ib_0$. Uit de ongelijkheden $|x|, |y| \le |x + iy| \le |x| + |y|$ volgt dat

$$\lim_{z \to b} f(z) = L \Longleftrightarrow \lim_{(x,y) \to (a_0,b_0)} u(x, y) = \mathrm{Re}\, L \quad \text{en} \quad \lim_{(x,y) \to (a_0,b_0)} v(x, y) = \mathrm{Im}\, L.$$

Tevens geldt

Propositie 4.2.1 *Als f, g complexe functies zijn met domein $U \subset \mathbb{C}$ en z_0 is een verdichtingspunt van U en $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ en $\lim_{z \to z_0} g(z) = M$ dan is*

1. $\lim_{z \to z_0} (Af(z) + Bg(z)) = AL + BM$ *voor* $A, B \in \mathbb{C}$.

2. $\lim_{z \to z_0} f(z)g(z) = LM$

3. $\lim_{z \to z_0} f(z)/g(z) = L/M$ *(mits $M \neq 0$).*

Naast de eigenlijke limiet onderscheiden we drie soorten oneigenlijke limieten:

a. Laat z_0 een verdichtingspunt van $U \subset \mathbb{C}$ en $f : U \to \mathbb{C}$ een complexe functie. $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ (of: $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$) wil zeggen: voor iedere $R > 0$ is er een $\delta > 0$ zodat $|f(z)| > R$ als $z \in U$ en $0 < |z - z_0| < \delta$.

b. Laat $U \subset \mathbb{C}$ een onbegrensde verzameling en $f : U \to \mathbb{C}$. De limiet $\lim_{z\to\infty} f(z) = L$ met $L \in \mathbb{C}$ wil zeggen: voor iedere $\epsilon > 0$ is er een $R > 0$ zodat $|f(z) - L| < \epsilon$ als $z \in U$ en $|z| > R$.

c. Laat $U \subset \mathbb{C}$ een onbegrensde verzameling en $f : U \to \mathbb{C}$. $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ (of: $\lim_{z\to\infty} |f(z)| = \infty$) wil zeggen: voor iedere $R > 0$ is er een $R' > 0$ zodat $|f(z)| > R$ als $z \in U$ en $|z| > R'$.

Voorbeeld 4.2.2 Ga na dat de volgende limieten gelden: $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{1}{z} = \infty$ en $\displaystyle\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^2} = 0$.

Nu kunnen we de definitie geven van een continue functie.

Definitie 4.2.3 *Zij $U \subset \mathbb{C}$ en $z_0 \in U$. De functie $f : U \to \mathbb{C}$ heet continu in z_0 als er voor iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodat $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ voor alle $z \in U$ met $|z - z_0| < \delta$.*

De functie $f : U \to \mathbb{C}$ heet continu op U als f continu is in z_0 voor alle $z_0 \in U$.

Merk op: als z_0 een ophopingspunt is van U, dan is $f : U \to \mathbb{C}$ continu in z_0 dan en slechts dan als $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. Als z_0 een geïsoleerd punt is van U dan is $f : U \to \mathbb{C}$ altijd continu in z_0.

Met behulp van Propositie 4.2.1 en de daaraan voorafgaande opmerking volgt nu onmiddellijk

Propositie 4.2.4 *Laat $U \subset \mathbb{C}$, z_0 een punt in U, $z_0 = a_0 + ib_0$ en $f, g : U \to \mathbb{C}$ complexe functies. Dan geldt:*

1. *f continu in z_0 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}\, f : U \to \mathbb{R}$ en $\mathrm{Im}\, f : U \to \mathbb{R}$ continu in $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$.*
2. *Als f, g continu in z_0, dan is $Af + Bg$ continu in z_0 voor $A, B \in \mathbb{C}$.*
3. *Als f, g continu in z_0, dan is $f \cdot g$ continu in z_0.*
4. *Als f, g continu in z_0 en $g(z_0) \neq 0$, dan is f/g continu in z_0.*

Voorbeeld 4.2.5 De functie $f(z) = z$ is continu op $\mathbb{C}$, dus $f(z) = z^n$ is continu op $\mathbb{C}$ voor $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ en op $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ voor $n \in \mathbb{Z}, n < 0$.

De functie e^z is continu op $\mathbb{C}$ want de reële en imaginaire delen $e^x \cos y$ en $e^x \sin y$ zijn continue functies op $\mathbb{R}^2$.

De functies $\cos z$ en $\sin z$ zijn continu op $\mathbb{C}$, en $\tan z$ is continu op $\mathbb{C}$ m.u.v. de punten $z = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

De functie $\overline{z}$ is continu volgens Propositie 4.2.4 en dus is $|z|^2$ continu volgens Propositie 4.2.4.

Voorbeeld 4.2.6 De functie

$$f : z \mapsto \begin{cases} \dfrac{\overline{z}}{z} & \text{als } z \neq 0 \\ c & \text{als } z = 0 \end{cases}$$

is voor geen enkele c continu in $z = 0$. Immers voor $z = x \in \mathbb{R}$ is $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ en voor $z = iy \in i\mathbb{R}$ is $\lim_{y\to 0} f(iy) = -1$. Maar voor $z \neq 0$ is f continu volgens Propositie 4.2.4.

De functie

$$g : z \mapsto \begin{cases} \dfrac{\overline{z}^2}{z} & \text{als } z \neq 0 \\ 0 & \text{als } z = 0 \end{cases}$$

is continu in $z = 0$. Immers $\lim_{z\to 0} |g(z)| = 0$ dus ook $\lim_{z\to 0} g(z) = 0$.

Verder is de compositie van twee continue functies continu.

Propositie 4.2.7 *Laat $f : U \to \mathbb{C}$ en $g : V \to \mathbb{C}$ zodat f continu is in $z_0 \in U$, $f(z_0) \in V$ en g continu in $f(z_0)$. Dan is de compositie $g \circ f$ continu in z_0.*

Voorbeeld 4.2.8 De functie $e^{1/z}$ is continu op $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Als f continu is op een verzameling U dan is er voor elke $\epsilon > 0$ en elke $z_0 \in U$ een $\delta = \delta(z_0, \epsilon)$ zodat voor $|z - z_0| < \delta$ en $z \in U$ geldt dat $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. I.h.a. hangt δ dus zowel van ϵ als van z_0 af. Als we bij elke $\epsilon > 0$ een $\delta = \delta(\epsilon)$ kan worden gevonden die niet van z_0 maar alleen van ϵ afhangt, dan heet f *uniform continu op U*.

Zo is, bijvoorbeeld, de functie $f(z) = 1/z$ wel continu, maar niet uniform continu op $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

We eindigen deze paragraaf met een nuttige stelling uit de topologie.

Stelling 4.2.9 *Het beeld $f(K)$ van een compacte verzameling $K \subset \mathbb{C}$ onder een continue functie $f : K \to \mathbb{C}$ is compact.*

Gevolg 4.2.10 *Een reëelwaardige continue functie op een compacte verzameling $K \subset \mathbb{C}$ neemt een maximum en een minimum aan op K.*

Gevolg 4.2.11 *Een continue functie op een compacte verzameling $K \subset \mathbb{C}$ is uniform continu op K.*

4.3 Differentieerbaarheid

Definitie 4.3.1 *Zij f een complexe functie gedefinieerd in een omgeving van $z_0 \in \mathbb{C}$. f is differentieerbaar in z_0 als*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

bestaat. De waarde van de limiet noteren we als $f'(z_0)$ of als $\dfrac{df}{dz}(z_0)$.

Zij $U \subset \mathbb{C}$ open. $f : U \to \mathbb{C}$ heet differentieerbaar op U als f differentieerbaar is in elk punt van U.

Een alternatieve maar gelijkwaardige definitie voor differentieerbaarheid in een punt is:

De functie f is differentieerbaar in z_0 als er een $A \in \mathbb{C}$ en $\epsilon > 0$ bestaat zodat voor $h \in \mathbb{C}$ met $|h| < \epsilon$ geldt dat

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + hA + R(h)$$

waarbij $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{h} = 0$.

Als we beide definities met elkaar vergelijken zien we dat het getal A in de tweede definitie gelijk is aan de afgeleide $f'(z_0)$.

De tweede definitie kunnen we korter noteren m.b.v. het o-symbool van Landau: Laat f en g twee functies die gedefinieerd zijn in de omgeving van een punt z_0 met $g(z_0) \neq 0$. Dan is

$$f(z) = o\big(g(z)\big) \qquad (z \to z_0) \quad \text{als } \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0.$$

Verder is

$$f(z) = O\big(g(z)\big) \qquad (z \to z_0)$$

als er een $C > 0$ bestaat zodat $|f(z)| < C|g(z)|$ in een gereduceerde omgeving $U_\epsilon(z_0)\backslash\{z_0\}$ van z_0.

Zo betekent $f(z) = o(1)$ $(z \to z_0)$ hetzelfde als $\lim_{z \to z_0} f(z) = 0$, en f is differentieerbaar in z_0 als er een $A \in \mathbb{C}$ bestaat zodat

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + hA + o(h) \qquad (h \to 0).$$

(De beste lineaire benadering van f in een ongeving van $z = z_0$.)

Propositie 4.3.2 *Als een functie f differentieerbaar is in $z_0 \in \mathbb{C}$, dan is f continu in z_0.*

Bewijs. Uit differentieerbaarheid van f in z_0 volgt dat $f(z_0 + h) = f(z_0) + o(1)$ voor $h \to 0$. $\square$

Voor het differentiëren van complexe functies gelden analoge regels als voor het differentiëren van reëele functies van één variabele (som-, product en quotiëntregel).

Propositie 4.3.3 *Laat f en g twee complexe functies zijn die differentieerbaar zijn in $z_0 \in \mathbb{C}$. Dan geldt:*

(i) Voor $A, B \in \mathbb{C}$ is $Af + Bg$ differentieerbaar in z_0 en

$$(Af + Bg)'(z_0) = Af'(z_0) + Bg'(z_0).$$

(ii) $f \cdot g$ is differentieerbaar in z_0 en:

$$(f \cdot g)'(z_0) = f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0).$$

(iii) Als $g(z_0) \neq 0$ is f/g differentieerbaar in z_0 en

$$(f/g)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

Voor compositie van differentieerbare functies geldt de kettingregel:

Propositie 4.3.4 *Laat f en g complexe functies zijn zodat g differentieerbaar in $z_0 \in \mathbb{C}$ en f differentieerbaar in $g(z_0)$ is. Dan is de compositie $f \circ g$ gedefinieerd in een omgeving van z_0 en is differentieerbaar in z_0 met afgeleide*

$$(f \circ g)'(z_0) = f'\big(g(z_0)\big) \cdot g'(z_0) = \frac{df}{dz}\big(g(z_0)\big) \cdot \frac{dg}{dz}(z_0).$$

Voorbeeld 4.3.5 De functie $f(z) = z$ is differentieerbaar op $\mathbb{C}$ en dus is z^n differentieerbaar op $\mathbb{C}$ voor $n \geq 0$ en op $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ voor $n < 0$. Verder zijn polynomen differentieerbaar op $\mathbb{C}$, en rationale functies $f(z) = P(z)/Q(z)$ (waarbij $P(z)$ en $Q(z)$ polynomen zijn) zijn differentieerbaar op $\mathbb{C}$ buiten nulpunten van de noemer $Q(z)$.

Om na te gaan of functies als e^z en $\operatorname{Log} z$ differentieerbaar zijn, is het nuttig om over een criterium te beschikken voor (complexe) differentieerbaarheid van functies in termen van hun reëele en imaginaire delen.

Zij $U \subset \mathbb{C}$ open en $f : U \to \mathbb{C}$ een complexe functie met reëele en imaginaire delen $u, v : U \to \mathbb{R}$ opgevat als functies op $U \subset \mathbb{R}^2$. Nu geldt:

Stelling 4.3.6 *De functie f is (complex) differentieerbaar in $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ dan en slechts dan indien u en v differentieerbaar in (x_0, y_0) zijn en tevens*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \qquad \text{en} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Als f differentieerbaar is in z_0, dan is

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0).$$

De twee partiële differentiaalvergelijkingen $u_x = v_y$ en $u_y = -v_x$ waaraan de reële en imaginaire delen van een differentieerbare functie voldoen heten de Cauchy-Riemann-vergelijkingen.

Volgens Stelling 4.3.6 is dus

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

voor een differentieerbare functie f. M.b.v. de Cauchy-Riemannvergelijkingen kunnen we dit ook schrijven als $f'(z_0) = -i\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0)$. Merk op dat de Cauchy-Riemann-vergelijkingen equivalent zijn aan

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0.$$

Zoals we weten is een reëelwaardige functie u in $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ differentieerbaar als er $A, B \in \mathbb{R}$ bestaan zodat voor h, k klein

$$u(x_0 + h, y_0 + k) = u(x_0, y_0) + Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \qquad (h, k \to 0).$$

In dit geval is $A = u_x(x_0, y_0)$ en $B = u_y(x_0, y_0)$. Een voldoende voorwaarde voor (totale) differentieerbaarheid van u wordt gegeven door

Propositie 4.3.7 *Laat $u : U \to \mathbb{R}$ een reëelwaardige functie op een open verzameling $U \subset \mathbb{R}^2$ zodat u partieel differentieerbaar is in een omgeving van $(x_0, y_0) \in U$ en de partiële afgeleiden u_x en u_y continu zijn in (x_0, y_0). Dan is u differentieerbaar in (x_0, y_0).*

Voorbeeld 4.3.8 De functie $f : z \mapsto e^z$ is differentieerbaar op $\mathbb{C}$ en $f'(z) = e^z$. Laat $f = u + iv$. Dan is

$$\begin{aligned} u(x, y) &= e^x \cos y \\ v(x, y) &= e^x \sin y. \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= v_y(x, y) = e^x \cos y \\ -u_y(x, y) &= v_x(x, y) = e^x \sin x. \end{aligned}$$

De partiële afgeleiden zijn continu op $\mathbb{R}^2$ en voldoen aan de Cauchy-Riemann-vergelijkingen. Volgens Stelling 4.3.6 en Propositie 4.3.7 is f dus differentieerbaar op $\mathbb{C}$ en

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x(x, y) + iv_x(x, y) \\ &= e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z. \end{aligned}$$

Voorbeeld 4.3.9 De functie $g : z \mapsto |z|^2$ is alleen differentieerbaar in $z = 0$.

Voor $z = 0$ is
$$\lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|^2}{h} = 0.$$
Voor $z \neq 0$ is Re $g = x^2 + y^2$ en Im $g = 0$. Dus aan de Cauchy-Riemannvergelijkingen is niet voldaan voor $(x, y) \neq (0, 0)$.

Voorbeeld 4.3.10 De functie $k : z \mapsto \text{Log } z$ is een differentieerbare functie op het gebied $G = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \arg z < \pi\}$. Immers

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \text{Re Log } z = \ln |z| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \\ v(x, y) &= \text{Im Log } z = \text{Arg } z. \end{aligned}$$

Verder is $\text{Arg} z = \arctan(y/x)$ voor $x > 0$ en voor $x < 0$ is $\text{Arg} z = \arctan(y/x) \pm \pi$. Voor $y > 0$ is $\text{Arg} z = \text{arccot}(x/y)$ en voor $y < 0$ is $\text{Arg} z = \text{arccot}(x/y) - \pi$. In al deze gevallen is
$$u_x(x, y) = v_y(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad u_y(x, y) = -v_x(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$
De partiële afgeleiden u_x, u_y, v_x en v_y zijn dus continu voor $(x, y) \neq (0, 0)$ en de Cauchy-Riemann-vergelijkingen gelden, en dus is k differentieerbaar op G en de afgeleide is

$$\begin{aligned} k'(z) &= u_x(x, y) - i u_y(x, y) \\ &= \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Merk op: de andere takken van de functie $z \mapsto \log z$ verschillen een imaginaire constante van de hoofdwaarde Log z en hebben dus dezelfde afgeleide $1/z$.

Voorbeeld 4.3.11 De functie $z \mapsto \overline{z}$ is nergens differentieerbaar op $\mathbb{C}$.

Voorbeeld 4.3.12 De functie $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeven door $g(z) = \overline{z}^2/z$ als $z \neq 0$ en $g(z) = 0$ als $z = 0$ is continu en de reële en imaginaire delen zijn partieel differentieerbaar in een gereduceerde omgeving van $z = 0$.

Maar g is nergens differentieerbaar op $\mathbb{C}$. We bekijken eerst het geval $z_0 = 0$. $g(z)/z \to 1$ als we z langs de reële of imaginaire as naar 0 laten gaan. Maar voor $\arg z = \pm\pi/4$ gaat $g(z)/z$ naar -1 als $z \to 0$. Als g in $z = z_0 \neq 0$ differentieerbaar zou zijn, zou volgens Propositie 4.3.3 hetzelfde gelden voor $zg(z) = \overline{z}^2$. Dat de laatste functie niet differentieerbaar is voor $z \neq 0$ volgt eenvoudig uit de Cauchy-Riemannvergelijkingen. Immers Re $\overline{z} = x^2 - y^2$, Im $\overline{z} = -2xy$.

4.4 Analytische functies

Definitie 4.4.1 *Laat $U \subset \mathbb{C}$ open. Een op U continu differentieerbare complexe functie $f : U \to \mathbb{C}$ heet analytisch of holomorf op U. (Een functie f heet continu differentieerbaar op U als f differentieerbaar en f' continu op U.)*

In feite geldt dat elke analytische functie op een open verzameling U oneindig vaak differentieerbaar is op U. Het bewijs hiervan wordt in het college Analyse 4 gegeven.

Er geldt, zoals in Propositie 4.2.4, 4.2.7, 4.3.3 en 4.3.4:

Propositie 4.4.2 *De som, het product en de compositie van analytische functies (mits goed gedefinieerd) is analytisch.*

Voorbeeld 4.4.3 Polynomen zijn analytisch op $\mathbb{C}$, evenals de functie e^z. Als g analytisch op U, dan is $e^{g(z)}$ analytisch op U. In feite zijn alle eenwaardige functies van §2 analytisch op hun domein. Voor de meerwaardige functies van §2 zijn alle takken analytisch op hun domein. De functie $|z|^2$ is nergens analytisch.

Definitie 4.4.4 *Zij $f : U \to \mathbb{C}$ een analytische functie. De continue functie $F : U \to \mathbb{C}$ heet een primitieve van f als $F' = f$.*

Propositie 4.4.5 *Laat $G \subset \mathbb{C}$ een gebied en $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch en $f' = 0$ op G. Dan is f constant op G.*

Uit Propositie 4.4.5 volgt dat twee primitieven van een analytische functie op een gebied op een additieve constante na gelijk zijn (m.a.w. als F_1 en F_2 primitieven van f, dan is $F_1 - F_2$ constant). Om Propositie 4.4.5 te bewijzen maken we gebruik van een aantal hulpresultaten.

Definitie 4.4.6 *Laat $a, b \in \mathbb{R}$ en $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ een continue complexwaardige functie. Dan is de integraal van f over het interval $[a, b]$ gedefinieerd als*

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; \int_a^b \mathrm{Re}\, f(x)dx \;+\; i \cdot \int_a^b \mathrm{Im}\, f(x)dx.$$

Lemma 4.4.7 *Laat $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ een continue complexwaardige functie op het reële interval $[a, b]$. Dan geldt de driehoeksongelijkheid:*

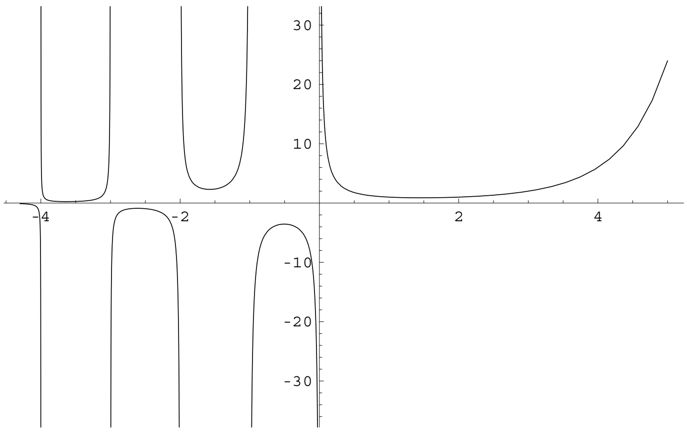
$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \;\leq\; \int_a^b |f(x)|dx.$$

Lemma 4.4.8 *Zij $G \subset \mathbb{C}$ een gebied en $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch. Als $\alpha, \beta \in G$ zodat seg(α, β) geheel in G ligt, dan is $|f(\alpha) - f(\beta)| \leq M|\alpha - \beta|$ waarbij M het maximum is van $|f'(z)|$ op het segment seg(α, β).*

Merk op dat M in Lemma 4.4.8 goed gedefinieerd is omdat $|f'|$ continu is op de compacte verzameling $\text{seg}(\alpha, \beta)$ (vergelijk Stelling 4.2.9).

Het bewijs van Propositie 4.4.5 is nu eenvoudig te geven.

Bewijs. Kies α en β in G zodat $\text{seg}(\alpha, \beta) \in G$. Volgens Lemma 4.4.8 is dan $f(\alpha) = f(\beta)$. Dus f is constant op elk segment in G. Daar G samenhangend, is volgens Propositie 2.4.1 elk tweetal punten in G door een lijnentrek te verbinden die geheel in G ligt. Dus is f constant op G. $\square$



Figuur 4.5: De gammafunctie van $\mathbb{R}\backslash\{0, -1, -2, \ldots\}$ naar $\mathbb{R}$.

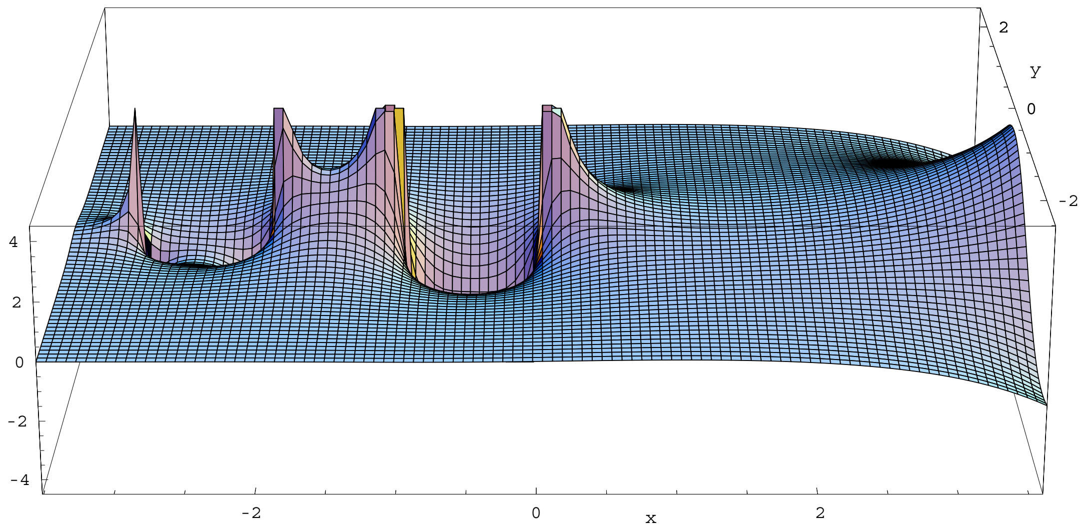
Voorbeeld 4.4.9 (De gammafunctie.) Met behulp van partiële integratie is eenvoudig te bewijzen dat $\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$ voor n een positief geheel getal. I.h.a. definiëren we:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

De integraal convergeert voor Re $z > 0$. Verder is met partiële integratie in te zien dat

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z).$$

Met behulp van de laatste identiteit kunnen we de gammafunctie voortzetten tot $G = \mathbb{C}\backslash\{0, -1, \ldots\}$: Definieer achtereenvolgens voor $N = 0, 1, 2, \ldots$ de gammafunctie voor $-N - 1 <$ Re $z \leq -N$ en $z \neq -N$ door middel van $\Gamma(z) = \Gamma(z + 1)/z$. Dan wordt $\Gamma(z)$ een analytische functie op het gebied G. Er geldt: $\Gamma(N + 1) = N!$ voor $N = 0, 1, 2, \ldots$ en $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.



Figuur 4.6: Het reële deel van de complexe gammafunctie: $\Gamma(x+iy)$.

4.5 Harmonische functies

Laat $f : U \to \mathbb{C}$ een analytische functie op een open verzameling $U \subset \mathbb{C}$. Dan voldoen de reële en imaginaire delen u en v aan de Cauchy-Riemannvergelijkingen: $u_x = v_y$ en $u_y = -v_x$ op U. Als verder u en v twee tweemaal continu differentieerbaar zijn dan is op U

$$u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy} \qquad \text{dus} \ \ u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Analoog is $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

Definitie 4.5.1 *Een tweemaal continu differentieerbare functie $u : U \to \mathbb{R}$ (met $U \subset \mathbb{R}^2$ open) heet harmonisch als*

$$\Delta u(x,y) = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \qquad \text{voor } (x,y) \in U.$$

Δu heet de Laplaciaan van u.

Uit het feit dat analytische functies op een open verzameling U oneindig vaak differentieerbaar zijn volgt nu

Propositie 4.5.2 *Zij $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch op een open verzameling $U \subset \mathbb{C}$. Dan zijn $u = \operatorname{Re} f$ en $v = \operatorname{Im} f$ harmonische functies op $U \subset \mathbb{R}^2$.*

Het omgekeerde is ook waar: elke harmonische functie is het reële deel van een analytische functie. Preciezer:

Stelling 4.5.3 *Zij $u : U \to \mathbb{R}$ een harmonische functie op de open verzameling $U \subset \mathbb{R}^2$. Dan is er een harmonische functie $v : U \to \mathbb{R}$ zodat $f = u + iv$ een analytische functie is op $U \subset \mathbb{C}$. Als U samenhangend is ,dan is v op een additieve constante na uniek bepaald.*

De functie v in Stelling 4.5.3 heet een *harmonisch geconjugeerde van u.*

We zullen Stelling 4.5.3 niet bewijzen, maar aan de hand van een tweetal voorbeelden laten zien hoe uit een harmonische functie u een complex geconjugeerde v en een analytische functie $f(z)$ zodat $u = \text{Re } f$ kunnen worden bepaald.

Voorbeeld 4.5.4 Laat $u(x, y) = y^3 - 3x^2y + \cosh x \cos y$. Het is eenvoudig om na te gaan dat $\Delta u = 0$ dus u harmonisch op $\mathbb{C}$. Om v te vinden passen we de Cauchy-Riemann-vergelijkingen toe:

$$v_y(x, y) = u_x(x, y) = -6xy + \sinh x \cos y$$

zodat

$$v(x, y) = \int v_y(x, y) dy = -3xy^2 + \sinh x \sin y + c(x)$$

met een integratieconstante $c(x)$. Deze vinden we door de tweede Cauchy-Riemannvergelijking toe te passen:

$$v_x(x, y) = -3y^2 + \cosh x \sin y + c'(x) = -u_y(x, y) = -3y^2 + 3x^2 + \cosh x \sin y.$$

Door de twee uitdrukkingen te vergelijkingen zien we dat $c'(x) = 3x^2$ en dus

$$v(x, y) = -3xy^2 + \sinh x \sin y + x^3 + c$$

met c een reële constante. Nu is $f = f(z)$ te bepalen als volgt:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = y^3 - 3x^2y + i(-3xy^2 + x^3) + \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y + ic$$

en dit is te schrijven m.b.v. $\cos it = \cosh t$ en $\sin it = i \sinh t$ en de optelformule voor de cosinus als

$$f(z) = i(x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3) + \cos ix \cos y + \sin ix \sin y + ic =$$

$$= i(x + iy)^3 + \cos(ix - y) + ic = iz^3 + \cos iz + ic$$

Nog eenvoudiger is het om in te zien dat $z = x$ als $y = 0$ en dus

$$f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0) = iz^3 + \cosh z + ic \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Voorbeeld 4.5.5 Laat

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

De functie u is een harmonische functie op $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ maar het is nogal bewerkelijk om Δu rechtstreeks te bepalen. Daarom bepalen we eerst $f'(z)$ via

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = u_x(x,y) - iu_y(x,y) :$$

We berekenen de partiële afgeleiden u_x, u_y van u:

$$u_x(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad u_y(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Dan

$$f'(z) = u_x(z,0) - iu_y(z,0) = -\frac{1}{z^2}$$

en dus is

$$f(z) = \frac{1}{z} + ic$$

met $c \in \mathbb{R}$. De harmonisch geconjugeerde v van u vinden we door $f = u + iv$ te schrijven (voor het gemak laten we de term ic weg):

$$f(z) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

en dus is

$$v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \ (+c).$$

Merk op dat we nu ook hebben aangetoond dat u harmonisch is, immers $u(x,y) = \operatorname{Re} \dfrac{1}{z}$.

4.6 Opgaven

Opg. 1 Bewijs de volgende formules voor $z, w \in \mathbb{C}$:

a. $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.

b. $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$.

c. $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$.

d. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

e. $\cosh z = \cos iz$.

f. $i \sinh z = \sin iz$.

g. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.

Opg. 2 Bewijs dat voor alle $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$ geldt:

a. $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.

b. $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$.

c. $\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$.

d. $|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$.

Opg. 3 Toon aan:

a. $\sin z$ heeft periode 2π; $\tanh z$ heeft periode πi.

b. $\sin z = 0 \Leftrightarrow z/\pi \in \mathbb{Z}$.

c. $\sin z$ is niet begrensd.

d. $\sinh(z + \pi i) = -\sinh z$; $\cosh(z + \pi i) = -\cosh z$.

Opg. 4 Bewijs: $\operatorname{Log}(1 + i) = \dfrac{1}{2} \ln 2 + \dfrac{\pi i}{4}$.

Opg. 5 Los op voor $z \in \mathbb{C}$: $\cos z = 2$.

Opg. 6 Bereken alle waarden van $1^{\sqrt{2}}$, $(-1)^i$, i^i, $\log \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Opg. 7 Ga na of de volgende functies continu zijn op $\mathbb{C}$:

a. $f(z) = \frac{\text{Re } z}{1+|z|}$ voor $z \neq 0$ en $f(0) = 0$.

b. $f(z) = \frac{\text{Re } z}{|z|}$ voor $z \neq 0$ en $f(0) = 0$.

c. $f(z) = \frac{(\text{Re } z)^2}{|z|}$ voor $z \neq 0$ en $f(0) = 0$.

d. $f(z) = \frac{z\text{Re } z}{|z|}$ voor $z \neq 0$ en $f(0) = 0$.

Opg. 8 Is $f(z) = e^{1/z}$ continu, resp. uniform continu op $\mathbb{C}\backslash\{0\}$? Is f uniform continu op $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \delta > 0\}$? Beantwoord dezelfde vragen voor $f(z) = e^{1/|z|}$.

Opg. 9 Toon aan, gebruik makend van de definitie van complexe differentieerbaarheid, dat $f(z) = \text{Re } z, \text{Im } z, \overline{z}$ in geen enkel punt van $\mathbb{C}$ differentieerbaar zijn. Toon dit ook aan m.b.v. de vergelijkingen van Cauchy-Riemann.

Opg. 10 Zij $G \subset \mathbb{C}$ een gebied en $f : G \to \mathbb{C}$ differentieerbaar. Bewijs dat elk van de volgende situaties impliceert dat f constant is op G:

a. $\text{Re } f$ is constant op G.

b. Re $f = \text{Im } f$ op G.

c. $|f|$ is constant op G.

d. $|f|$ is differentieerbaar op G.

Opg. 11 Bepaal de afgeleiden van $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$ en $\cosh z$. Voor welke $z \in \mathbb{C}$ zijn $\tan z$, $\cot z$, $\tanh z$ en $\coth z$ differentieerbaar? Bepaal in die punten de afgeleiden.

Opg. 12 Welke van de volgende functies $u(x, y)$ zijn harmonisch op G? Bepaal, indien mogelijk, de harmonisch geconjugeerden $v(x, y)$ en een analytische functie $f(z)$ (met $z = x + iy$) zodat u het reële deel van f is (geef f als functie van z).

a. $u(x, y) = e^x \sin y$; $G = \mathbb{C}$.

b. $u(x, y) = \cosh x \cos y$; $G = \mathbb{C}$.

c. $u(x, y) = \cos x \cos y + x^2 - y^2$; $G = \mathbb{C}$.

d. $u(x, y) = -3x^2y + y^3$; $G = \mathbb{C}$.

e. $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$; $G = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0\}$.

f. $u(x, y) = \arctan(y/x)$; $G = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0\}$.

g. $u(x, y) = (\cos x + \sin x)(e^y + e^{-y})$; $G = \mathbb{C}$.

h. $u(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$; $G = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Opg. 13 Bepaal alle op $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ analytische functies f waarvan het reële deel voldoet aan

a. $u(x, y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - 2xy + e^{-y} \cos x$.

b. Doe hetzelde voor $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y) + 2xy$.

Hoofdstuk 5

UNIFORME CONVERGENTIE

5.1 Uniforme convergentie voor reële functies

In deze paragraaf staat een convergentiebegrip centraal dat het verwisselen van limiet-processen toestaat. Zij I een deelverzameling van $\mathbb{R}$, en zij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij van reële functies op I. We zullen zo'n rij ook wel verkort weergeven met $(f_n)_1^{\infty}$ of met (f_n). Veronderstel dat voor iedere $x \in I$ de rij $(f_n(x))$ convergeert. Dan kunnen we een nieuwe functie $F : I \to \mathbb{R}$ definiëren, namelijk

$$F(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad x \in I.$$

We noemen F de *limiet* of de *limietfunctie* van de rij (f_n). We zeggen ook wel dat de rij (f_n) *puntsgewijs convergeert* op I naar de functie F.

Stel de rij (f_n) convergeert puntsgewijs op I naar F. We kunnen onszelf de volgende twee vragen stellen:

1. *Als voor iedere n de functie f_n een bepaalde eigenschap bezit, geldt dan dat de limietfunctie ook die eigenschap heeft?*

2. *Mogen twee limiet-processen verwisseld worden?* Geldt bijvoorbeeld altijd dat

$$\lim_{t\to x}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{t\to x} f_n(t)\right)$$

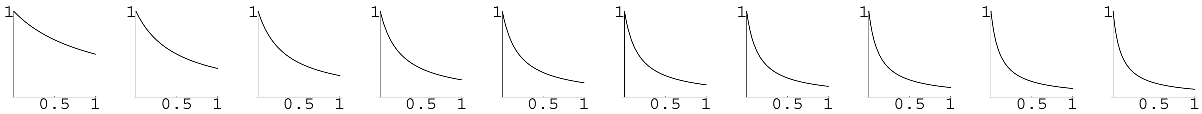
of

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)dx = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \ ?$$

Er is een samenhang tussen beide vragen. Als $I \subset \mathbb{R}$ en als $f_n : I \to \mathbb{R}$ continu is op I voor iedere n, dan is de limietfunctie F ook continu op I indien aan de volgende gelijkheid is voldaan:

$$\lim_{t\to x}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{t\to x} f_n(t)\right).$$

In het algemeen is het antwoord op beide vragen ontkennend. Zie de volgende voorbeelden met I = [0,1].



Figuur 5.1: Grafieken van de functies $f_n(x) = (nx + 1)^{-1}$ met $n = 1, \ldots, 10$.

Voorbeeld 5.1.1 Beschouw $f_n(x) = (nx + 1)^{-1}$ voor $n \in \mathbb{N}$. Deze rij convergeert puntsgewijs op $[0, 1]$. De limietfunctie is de functie

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x \neq 0, \\ 1 & \text{voor } x = 0. \end{cases}$$

Merk op dat alle functies f_n continu zijn op $[0, 1]$, maar dat de limietfunctie niet continu in 0 is. □

Voorbeeld 5.1.2 Zij $f_n(x) = nx(1 - x^2)^n$ voor $n \in \mathbb{N}$. Deze rij convergeert puntsgewijs op $[0, 1]$ naar de nulfunctie. Merk op dat

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 nx(1 - x^2)^n dx = \frac{1}{2}\frac{n}{n+1} \to \frac{1}{2}, \quad n \to \infty.$$

Maar de integraal van de limietfunctie is 0. Dus in het algemeen mogen de limiet en integraal niet verwisseld worden. □

Voorbeeld 5.1.3 Zij $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx$ voor $n \in \mathbb{N}$. Deze rij convergeert puntsgewijs op $[0, 1]$ naar de nulfunctie. Alle f_n en ook de limietfunctie F zijn differentieerbaar, maar $f_n'(x) = \sqrt{n} \cos nx$ en de rij (f_n') convergeert niet puntsgewijs op $[0, 1]$. Dus in dit geval is de afgeleide van de limietfunctie niet de limiet van de afgeleiden. □

We introduceren nu een nieuw convergentiebegrip, dat voor het verwisselen van limietprocessen beter geschikt is. Ter onderscheid zullen we het convergentiebegrip van hierboven *puntsgewijze convergentie* noemen.

Definitie 5.1.4 *Een rij functies $f_n : I \to \mathbb{R}$ convergeert uniform op I naar een functie F als er bij iedere $\varepsilon > 0$ een natuurlijk getal $N = N_\varepsilon$ bestaat zó dat $|F(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ voor alle $n \geq N$ en alle $x \in I$.*

Merk op dat een rij functies die uniform convergeert op I ook puntsgewijs convergeert op I en wel naar dezelfde limietfunctie. Aan de hand van een voorbeeld zien we dat puntsgewijze convergentie geen uniforme convergentie impliceert.

Voorbeeld 5.1.5 Neem $I = (0, \infty)$ en $f_n(x) = (nx + 1)^{-1}$ voor $n \in \mathbb{N}$. De rij (f_n) convergeert puntsgewijs naar de nulfunctie, maar de convergentie is niet uniform. Er is immers voor iedere n een $x \in I$ met $f_n(x) \geq 1/2$.

We noemen ook het volgende belangrijke criterium om uniform convergente rijen te herkennen.

Stelling 5.1.6 (Criterium van Cauchy) *Een rij reële functies $f_n : I \to \mathbb{R}$ convergeert uniform op I als en alleen als er bij iedere $\varepsilon > 0$ een natuurlijk getal $N = N_\varepsilon$ bestaat zó dat uit $m \geq N$ en $n \geq N$ volgt dat $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ voor iedere $x \in I$.*

Bewijs. Veronderstel dat de rij (f_n) uniform convergeert op I. Zij F de limietfunctie. Neem $\varepsilon > 0$. Dan is er een natuurlijk getal N zó dat $|F(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ indien $n \geq N$ en $x \in I$. Hieruit volgt dat

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - F(x)| + |F(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

als $m \geq N$, $n \geq N$ en $x \in I$.

Omgekeerd, stel er is voldaan aan de bovenstaande Cauchy-voorwaarde. Dan is voor iedere $x \in I$ de rij $(f_n(x))$ een Cauchy-rij in $\mathbb{R}$. Dus bestaat $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor iedere $x \in I$, want $\mathbb{R}$ is volledig (Stelling 1.5.5). Zij F de limietfunctie. Neem $\varepsilon > 0$, en kies N zó dat

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.1}$$

voor $n \geq N$, $m \geq N$ en $x \in I$. Omdat $f_m(x) \to F(x)$ volgt uit (1.1) dat $|f_n(x) - F(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ indien $n \geq N$ en $x \in I$. $\square$

De volgende stelling laat zien dat voor uniform convergente rijen van functies het probleem bij Voorbeeld 5.1.1 *niet* optreedt.

Een andere manier om te zeggen dat de rij f_n uniform convergent is op I is

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0,$$

waarbij

$$\delta_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$$

en $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ de puntsgewijze limiet van de rij f_n is. We noemen dit soms het δ_n-criterium voor uniforme convergentie.

Stelling 5.1.7 *Als $f_n : I \to \mathbb{R}$ een rij continue functies is die uniform convergeert op I, dan is de limietfunctie ook weer continu op I.*

Bewijs. Zij (f_n) een rij van continue functies op I en zij F de limietfunctie. Laat $x_0 \in I$ en $\varepsilon > 0$. Kies een natuurlijk getal N zó dat $|F(x) - f_N(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ voor elke $x \in I$. Omdat f_N continu is in x_0, is er een $\delta > 0$ zó dat $|x - x_0| < \delta$ impliceert dat $|f_N(x_0) - f_N(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Voor x met $|x - x_0| < \delta$ geldt dan

$$|F(x) - F(x_0)| \leq |F(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - F(x_0)| < \varepsilon.$$

□

De volgende stelling laat zien dat, in tegenstelling tot de situatie beschreven in Voorbeeld 5.1.2, bij uniform convergente rijen van functies de integraal en de limiet wèl verwisseld mogen worden.

Stelling 5.1.8 *Als een rij continue functies (f_n) op $[a, b]$ uniform convergeert op $[a, b]$, dan*

$$\int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx. \tag{1.2}$$

Bewijs. Zij F de limietfunctie. We weten op grond van Stelling 5.1.7 dat F continu is op $[a, b]$. Dus F is zeker Riemann-integreerbaar op $[a, b]$. Het linkerlid van (1.2) is dus goed gedefinieerd. Beschouw nu

$$\left| \int_a^b F(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| = \left| \int_a^b (F(x) - f_n(x))\, dx \right| \leq \int_a^b |F(x) - f_n(x)| dx$$

$$\leq \sup_{a \leq x \leq b} |F(x) - f_n(x)|\ |b - a| \to 0, \text{ als } n \to \infty.$$

□

In woorden zegt deze stelling dat in geval van uniforme convergentie limiet en integraal verwisseld mogen worden. Dit heeft allerlei gevolgen. Omdat een continu differentieerbare functie te schrijven is als onbepaalde integraal van zijn afgeleide, hebben we bijvoorbeeld het volgende.

Stelling 5.1.9 *Zij (f_n) een rij continu differentieerbare functies op $[a, b]$. Veronderstel dat de rij van afgeleiden (f'_n) uniform convergeert op $[a, b]$. Als er bovendien een punt $x_0 \in [a, b]$ is waarvoor de rij $(f_n(x_0))$ convergeert, dan convergeert de rij (f_n) uniform op $[a, b]$, de limietfunctie F op $[a, b]$ is continu-differentieerbaar en*

$$F'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x), \qquad a \leq x \leq b.$$

Bewijs. Zij g de limiet van de rij van afgeleiden (f_n'). Volgens Stelling 5.1.7 is g continu op $[a,b]$. Neem $x \in [a,b]$. Gebruik nu Stelling 5.1.8 om aan te tonen dat

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt \to \int_{x_0}^{x} g(t)dt, \qquad n \to \infty. \tag{1.3}$$

Volgens het gegeven convergeert de rij $(f_n(x_0))$. Maar dan volgt uit (1.3) dat de rij (f_n) puntgewijs convergeert op $[a,b]$, en de limietfunctie F voldoet aan de gelijkheid

$$F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)dt.$$

Dus is F differentieerbaar op $[a,b]$ en $F' = g$. Omdat g continu is, volgt dat F een continu differentieerbare functie is. Bovendien

$$\begin{aligned} |f_n(x) - F(x)| &\leq |(f_n(x) - f_n(x_0)) - (F(x) - F(x_0))| + |f_n(x_0) - F(x_0)| \\ &= \left| \int_{x_0}^{x} (f_n'(t) - g(t))\, dt \right| + |f_n(x_0) - F(x_0)| \\ &\leq \left(\max_{t \in [x_0,x] \cup [x,x_0]} |f_n'(t) - g(t)| \right) |x - x_0| + |f_n(x_0) - F(x_0)|, \end{aligned}$$

waarmee bewezen is dat de rij (f_n) uniform convergeert op $[a,b]$ naar F. □

5.2 Uniforme convergentie voor reeksen

Het begrip uniforme convergentie kan men ook bekijken voor reeksen.

Definitie 5.2.1 *Zij $I \subset \mathbb{R}$ en $f_n : I \to \mathbb{R}$ een rij reële functies op I. We zeggen dat de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ uniform convergeert op I als de bijbehorende rij van partiële sommen $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ gegeven door*

$$s_k(x) := f_1(x) + \cdots + f_k(x), \quad x \in I,$$

uniform convergeert op I.

Stelling 5.2.2 (Criterium van Weierstrass) *Veronderstel dat*

$$|f_k(x)| \leq M_k, \qquad x \in I, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Als $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ convergeert, dan convergeert de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ uniform op I.

Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$. Kies een natuurlijk getal N zó dat $\sum_{k=N+1}^{\infty} M_k < \varepsilon$. Dan

$$|s_q(x) - s_p(x)| = |\sum_{k=p+1}^{q} f_k(x)| \leq \sum_{k=p+1}^{q} |f_k(x)| \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} M_k \leq \varepsilon$$

voor iedere $x \in I$ en $q > p \geq N$. Gebruik nu het Cauchy-criterium, Stelling 5.1.6, en concludeer dat de rij (s_k) uniform convergeert op $[a,b]$. □

5.3 Opgaven

Opg. 1 Bewijs dat een rij functies $f_n : I \to \mathbb{R}$ uniform op I naar F convergeert als en alleen als

$$\lim_{n\to\infty} (\sup_{x\in I} |F(x) - f_n(x)|) = 0.$$

Voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat er dus een natuurlijk getal N zó dat $|F(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ voor alle $n \geq N$ en $x \in I$.

Opg. 2 Bepaal in de volgende gevallen de puntsgewijze limiet van de rij functies (f_n), en ga na of de convergentie uniform is op I.

a. $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ op resp. $I = [1, \infty)$, $I = [0, 1]$ en $I = [-1, 1]$.

b. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ op resp. $I = [1, 2]$ en $I = [0, 1]$.

c. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx^2}$ op resp. $I = [0, 1]$ en $I = [\delta, \infty)$ met $\delta > 0$.

d. $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x^2}$ op resp. $I = [0, 1]$, $I = (0, 1]$, en $I = [\delta, 1]$ met $0 < \delta < 1$.

e. $f_n(x) = e^{-|x-n|}$ op $I = \mathbb{R}$.

Opg. 3 Laat (f_n) en (g_n) rijen van reële functies op $I \subset \mathbb{R}$ zijn.

a. Toon aan: als (f_n) uniform convergent is op I en als ieder van de functies f_n begrensd is op I, dan is de rij functies (f_n) uniform begrensd op I, dat wil zeggen er bestaat $M > 0$ zò dat $|f_n(x)| \leq M$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $x \in I$.

b. Laat zien dat als (f_n) en (g_n) uniform convergent zijn, dan is de rij $(f_n + g_n)$ ook uniform convergent.

c. Bewijs dat als (f_n) en (g_n) uniform convergent en begrensd zijn, dan is $(f_n g_n)$ ook uniform convergent.

Opg. 4 Beschouw de rij functies (f_n) op $(0, 1)$ gegeven door

$$f_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{n} - \frac{n}{n+x}.$$

Bewijs dat de rij functies uniform convergent is op $(0, 1)$. Is de rij afgeleide functies (f_n') ook uniform convergent op $(0, 1)$?

Opg. 5 Laat de rij functies (f_n) op $[0, \infty)$ gegeven zijn door

$$f_n(x) = \frac{x}{(x+\frac{1}{n})^n}.$$

a. Onderzoek voor welke $x \geq 0$ de rij $(f_n(x))$ convergeert.

b. Zij $t > 1$. Bewijs dat de rij (f_n) uniform convergeert op $[t, \infty)$.

c. Laat zien dat de rij (f_n) *niet* uniform convergeert op $[1, \infty)$.

d. Is de rij (f_n) uniform convergent op $(1, \infty)$?

Opg. 6 Formuleer en bewijs versies van de Stellingen 5.1.7 en 5.1.8 voor functie*reeksen* in plaats van functierijen.

We zullen reeksen (van functies) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ook wel verkort weergeven met $\sum f_n$.

Opg. 7 Laat (f_n) een rij reële functies zijn op I. Toon aan dat als $\sum f_n$ uniform convergeert op I, dat (f_n) dan uniform convergeert naar de nulfunctie op I.

Opg. 8 Ga in de volgende gevallen na of de reeks $\sum f_n$ uniform convergeert op de deelverzameling $I \subset \mathbb{R}$.

a. $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n^2}$ op $I = \mathbb{R}$.

b. $f_n(x) = e^{nx}$ op $I = (-2, -1)$.

c. $f_n(x) = n(n+1)x^n$ op $I = [-1 + \delta, 1 - \delta]$ met $0 < \delta < 1$.

Opg. 9 Bereken de volgende limieten en rechtvaardig de daarbij gevolgde stappen.

a. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_1^2 e^{-nx^2} dx$

b. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 e^{-nx^2} dx$

c. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \arctan(nx(x+1)) dx$

Opg. 10 Laat (f_n) een rij reële functies zijn op $\mathbb{R}$ gedefinieerd door $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$.

a. Bereken $F(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor $x \in \mathbb{R}$.

b. Bewijs dat de rij functies (f_n) uniform convergeert op $[\delta, \infty)$ met $\delta > 0$. *Hint:* Toon aan dat $0 < f_n(x) \leq f_n(\delta)$ voor alle $x \geq \delta$, mits n voldoende groot is.

c. Convergeert (f_n) uniform op $[0, \infty)$?

d. Voor welke $0 \leq a < b < \infty$ geldt

$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) dx \text{ ?}$$

Opg. 11 Gegeven is de rij functies (f_n) op $[0,\infty)$ door $f_n(x) = \frac{1}{n}\log(1+\frac{x}{n})$.

a. Bewijs dat de reeks $\sum f_n$ puntsgewijs convergeert op $[0,\infty)$ en uniform convergeert op $[0,A]$ voor iedere $A>0$.

b. Laat zien dat $\sum f_n$ *niet* uniform convergeert op $[0,\infty)$.

c. Geldt $\displaystyle\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ voor alle $x>0$?

Opg. 12 Laat de rij functies (f_n) op $\mathbb{R}$ gegeven zijn door $f_n(x) = \frac{1}{n}e^{-nx}$.

a. Toon aan dat de reeks $\sum f_n$ puntsgewijs convergeert op $(0,\infty)$. Bepaal ook de somfunctie F.

b. Toon aan dat voor ieder $0<\varepsilon<1$ geldt

$$\int_\varepsilon^1 F(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\varepsilon^1 f_n(x)dx.$$

c. Bewijs tenslotte dat

$$\int_0^1 \log\frac{1}{1-e^{-x}}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(1-e^{-n}).$$

Opg. 13 Op het interval $[0,\infty)$ is een rij continue reële functies $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ gegeven door het voorschrift

$$f_0(x) = x, \quad f_n(x) = x + \int_0^x f_{n-1}(t)\sin(x-t)dt, \ n\geq 1.$$

Het feit dat deze functies continu zijn op $[0,\infty)$ hoeft niet apart te worden aangetoond.

a. Bewijs dat de volgende afschatting geldt:

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}, \ n\geq 0, \quad x\geq 0.$$

b. Laat zien dat de rij (f_n) puntsgewijs convergeert naar een functie f op $[0,\infty)$. Bewijs ook dat de rij uniform convergeert naar f op $[0,A]$ voor alle $A>0$.

c. Toon aan dat f continu is op $[0,\infty)$.

d. Bewijs dat f voldoet aan de vergelijking

$$f(x) = x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)dt, x\geq 0.$$

Hoofdstuk 6

MACHTREEKSEN

6.1 Criteria voor absolute convergentie

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien dat in het algemeen twee limiet-processen niet mogen worden verwisseld, tenzij specifieke voorwaarden worden gesteld zoals uniforme convergentie. Ook bij dubbelreeksen is iets dergelijks het geval; het volgende voorbeeld en de daarop volgende stelling maken dit duidelijk. Eerst bespreken we kort een notatie-kwestie. De *Kronecker-delta* δ_{ij} is als volgt gedefinieerd voor $i, j \in \mathbb{N}$: Indien $i = j$, dan $\delta_{ij} = \delta_{ii} = 1$, en als $i \neq j$, dan $\delta_{ij} = 0$.

Voorbeeld 6.1.1 Beschouw $a_{ij} = \delta_{ij} - \delta_{i+1,j}$ voor $i, j \in \mathbb{N}$. Dan

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}) = 0 \neq 1 = \sum_{j=1}^{\infty}(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}).$$

Zonder bewijs geven we de volgende stelling.

Stelling 6.1.2 *Als $\sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|) < \infty$, dan*

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}) = \sum_{j=1}^{\infty}(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}).$$

In Stelling 6.1.2 wordt gesteld dat bij een absoluut convergente dubbelreeks, de volgorde van sommatie mag worden omgedraaid. We bespreken nu enkele criteria voor absolute convergentie van reeksen.

Stelling 6.1.3 (Wortelcriterium van Cauchy) *Zij $\sum a_n$ een reeks van complexe getallen, en zij $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Als $\alpha < 1$, dan is de reeks $\sum a_n$ absoluut convergent, als $\alpha > 1$, dan divergeert de reeks $\sum a_n$, en voor $\alpha = 1$ geeft het wortelcriterium geen uitsluitsel.*

Bewijs. Zij $\alpha < 1$. Neem $\alpha < \beta < 1$. Omdat

$$\beta > \alpha = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} \sqrt[n]{|a_k|},$$

is er een rangnummer N zó dat $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \beta$ voor $n \geq N$. Dus $|a_n| \leq \beta^n$ voor $n \geq N$. Maar de reeks $\sum \beta^n$ is convergent. Dus volgt met het vergelijkingscriterium dat $\sum |a_n|$ convergeert.

Als $\alpha > 1$, dan is er een deelrij van de rij $(\sqrt[n]{|a_n|})_n$ die naar α convergeert. Er zijn dus $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ zó dat $\sqrt[n_i]{|a_{n_i}|} \geq 1$. Daaruit volgt $|a_{n_i}| \geq 1$ voor $i \in \mathbb{N}$, en dus convergeert de rij (a_n) niet naar nul. Maar dan is de reeks $\sum a_n$ ook niet convergent.

De reeks $\sum n^{-1}$ divergeert, terwijl $\sum n^{-2}$ convergeert, maar in beide gevallen is $\alpha = 1$. Dus voor $\alpha = 1$ geeft het criterium geen uitsluitsel. □

Stelling 6.1.4 (Het quotientcriterium van d'Alembert) *Zij $\sum a_n$ een reeks van complexe getallen ongelijk aan* 0. *Als*

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1,$$

dan convergeert de reeks absoluut. Is $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ voor $n \geq n_0$, dan is de reeks $\sum a_n$ divergent.

Bewijs. Laat $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ en kies β zodat $\alpha < \beta < 1$. Dan is er een rangnummer N zó dat

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \beta, \quad n \geq N.$$

Dus $|a_{N+1}| < \beta |a_N|$, $|a_{N+2}| < \beta |a_{N+1}| < \beta^2 |a_N|$, en zo volgt

$$|a_n| < \beta^{n-N} |a_N| = (\beta^{-N} |a_N|) \beta^n, \quad n \geq N.$$

Met het vergelijkingscriterium volgt dan weer dat $\sum |a_n|$ convergeert.

Als $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ voor $n \geq n_0$, dan convergeert de rij (a_n) niet naar nul, en dus is de reeks $\sum a_n$ in dat geval divergent .. □

Voorbeeld 6.1.5 Aan de hand van bovenstaande criteria kunnen we de convergentie van de reeksen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} (1 + (-1)^n)^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n + (-1)^n}{n!(3^n)}$$

bewijzen. Immers, het wortelcriterium van Cauchy geeft convergentie van de eerste reeks op grond van

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n^3 (1 + (-1)^n)^n}{3^n}} = \frac{2}{3} < 1,$$

en het quotientcriterium van d'Alembert stelt convergentie vast voor de tweede reeks met

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}+(-1)^{n+1}(n+1)}{(n+1)!3^{n+1}} \cdot \frac{n!3^n}{n^n+(-1)^n n} &= \\ = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{3}\frac{(n+1)^n+(-1)^{n+1}}{n^n+(-1)^n n} \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\frac{(n+1)^n+(-1)^{n+1}}{n^n+(-1)^n n} \\ = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \frac{e}{3} < 1.\end{aligned}$$

Opgaven

Opg. 1 Laat de rij (a_n) in $\mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$a_n = \begin{cases} 1/n, & n \text{ even} \\ 1/n^2, & n \text{ oneven} \end{cases}.$$

Bepaal $\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, $\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, $\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ en $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. Bewijs dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergeert.

Opg. 2 Zij $a_n > 0$ en $\sum_n a_n$ divergent. Bewijs de volgende beweringen.

a. $\sum_n \frac{a_n}{1+a_n}$ is divergent

b. $\sum_n \frac{a_n}{a_1+\ldots+a_n}$ is divergent. *Aanwijzing:* $\frac{a_{N+1}}{S_{N+1}}+\ldots+\frac{a_{N+k}}{S_{N+k}} \geq 1-\frac{S_N}{S_{N+k}}$, waarbij $S_n = a_1+\ldots+a_n$

c. $\sum_n \frac{a_n}{(a_1+\ldots+a_n)^2}$ is convergent. *Aanwijzing:* $\frac{a_n}{S_n^2} \leq \frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}$.

Opg. 3 Zij $\sum_n a_n$ een reeks met partiële sommen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Schrijf

$$\sigma_n = \frac{s_0+\ldots+s_n}{n+1}.$$

a. Toon aan dat als $\sum_n a_n = s$ convergeert, dan $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = s$.

b. Geef een voorbeeld waarbij $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = s$ bestaat (bijvoorbeeld $s=0$), terwijl $\sum_n a_n$ divergeert

c. Bewijs dat $s_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k a_k$

d. Gebruik (c) om aan te tonen dat als (σ_n) convergeert en $na_n \to 0$, dan convergeert $\sum_n a_n$

6.2 Convergentietesten voor machtreeksen

Een *machtreeks* is een reeks van de vorm

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

waarbij $z_0, a_0, a_1, a_2, \ldots$ complexe getallen zijn en z waarden in $\mathbb{C}$ kan aannemen. Het punt z_0 heet het *centrum* van de machtreeks.

In het algemeen zal de reeks slechts voor een beperkt aantal waarden van z convergeren. Om na te gaan hoe de verzameling van $z \in \mathbb{C}$ er uit ziet waarvoor de reeks convergeert, kunnen we gebruik van de convergentietesten voor reeksen uit het vorige hoofdstuk.

Als we het Wortelcriterium van Cauchy, zie Propositie 6.1.3, toepassen op machtreeksen vinden we het volgende basisresultaat.

Propositie 6.2.1 *Als*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

dan convergeert de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

absoluut voor $|z - z_0| < R$. *Als* $|z - z_0| > R$ *divergeert de machtreeks.*

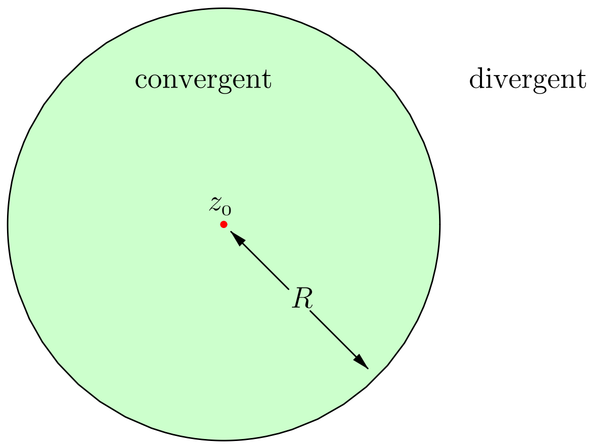
We kunnen dus drie gevallen onderscheiden:

1. Als $R = \infty$ convergeert de machtreeks voor alle $z \in \mathbb{C}$.

2. Als $0 < R < \infty$ dan convergeert de machtreeks op een open cirkelschijf met straal R en het centrum van de machtreeks als middelpunt. Buiten de cirkel $\{|z - z_0| = R\}$ divergeert de reeks, en op de cirkel is er geen uitsluitsel. De cirkel $\{|z - z_0| = R\}$ noemen we de *convergentiecirkel* van de machtreeks en R heet de *convergentiestraal*. Zie Figuur 6.1.

3. Als $R = 0$ dan divergeert de machtreeks overal (behalve in het triviale geval $z = z_0$, waarvoor de som van de reeks gelijk is aan de eerste term a_0).

Een machtreeks kunnen we opvatten als een complexe functie met als domein de waarden van $z \in \mathbb{C}$ waarvoor de reeks convergeert. We zullen zien dat binnen de convergentiecirkel (dit is geheel $\mathbb{C}$ als $R = \infty$ en leeg als $R = 0$) een machtreeks een analytische functie voorstelt. D.m.v. de substitutie $w = z - z_0$ kunnen we elke machtreeks opvatten als een machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ met centrum $w = 0$. In het vervolg zullen we steeds aannemen dat het centrum van de machtreeks 0 is. Dit is dus geen echte beperking.



Figuur 6.1: Het convergentiegebied in $\mathbb{C}$ voor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ met convergentiestraal R.

Voorbeeld 6.2.2 De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ heet de *meetkundige reeks*. De coëfficiënten a_n zijn alle 1. De convergentiestraal is dus $R = 1$. Binnen de convergentiecirkel geldt

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Dit kunnen we als volgt inzien: voor $N \in \mathbf{N}$ is

$$(1-z)(1+z+z^2+\ldots+z^N) = 1 - z^{N+1}, \qquad \text{en dus } \sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}$$

voor $z \neq 1$. Nu is voor $|z| < 1$: $\lim_{n\to\infty} z^N = 0$ en dus gaat het rechterlid naar $\dfrac{1}{1-z}$ als $N \to \infty$. Als $|z| \geq 1$ dan is $\lim_{n\to\infty} |z|^n \neq 0$ zodat we m.b.v. Propositie 3.1 direkt inzien dat de reeks divergeert zonder de expliciete uitdrukking voor de directe sommen te gebruiken. Later zullen we nog gebruiken dat voor $|z| = 1, z \neq 1$ de partiële sommen van de meetkundige reeks begrensd zijn:

$$\left|\sum_{n=0}^{N} z^n\right| = \left|\frac{1-z^{N+1}}{1-z}\right| \leq \frac{2}{|1-z|} \quad (N \in \mathbf{N}).$$

Voorbeeld 6.2.3 De reeks $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ convergeert voor alle $z \in \mathbb{C}$. We gebruiken het quotientcriterium van d'Alembert, zie Propositie 6.1.4:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!}\right| = |z| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

dus volgens het criterium van d'Alembert convergeert de reeks absoluut voor alle $z \in \mathbb{C}$. De som van de reeks is gelijk aan e^z.

Propositie 6.2.4 *(Convergentiecriterium van Dirichlet) Zij* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *een reeks complexe getallen zodat de rij van partiële sommen begrensd is:*

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n\right| < M$$

voor zekere $M \in \mathbb{R}$ *en zij* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *een monotoon naar* 0 *dalende rij reële getallen:* $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \ldots$ *en* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$*. Dan is de reeks* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ *convergent.*

Voorbeeld 6.2.5 We onderzoeken de convergentie van de reeks $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n$ voor $k \in \mathbb{R}$. Met de worteltest volgt dat de convergentiestraal gelijk is aan 1. (Hiervoor is het nodig om te weten dat $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.) De verhoudingstest van d'Alembert leidt tot dezelfde conclusie. Het is dus voldoende om het geval $|z| = 1$ te bekijken. Daar $\lim_{n\to\infty} n^k \neq 0$ als $k \geq 0$ is er divergentie voor $|z| = 1, k \geq 0$. Laat dus $k < 0$. Voor $z = 1$ hebben we de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} n^k$. Het is eenvoudig in te zien dat deze reeks convergeert voor $k < -1$. Er blijft dus over het geval $|z| = 1, z \neq 1$, $k < 0$, maar in dit geval convergeert de reeks volgens Propositie 6.2.4.

6.3 Bewerkingen met machtreeksen

Optelling

Als $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ machtreeksen met convergentiestralen $R_1, R_2 > 0$ zijn, dan convergeert de reeks $\sum_{n=0}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)|z|^n$ voor $|z| < R = \min(R_1, R_2)$. Dus convergeert de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty}(Aa_n + Bb_n)z^n$$

voor $A, B \in \mathbb{C}$ en $|z| < R$ en de som is gelijk aan $Af(z) + Bg(z)$.

Voorbeeld 6.3.1 Laat $f(z)$ een even functie met machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en convergentiestraal R. Aangezien $f(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-z)^n$ en $f(z) = \big(f(z)+f(-z)\big)/2$, volgt dat $a_n = 0$ voor n oneven.

Analoog zijn alle coëfficiënten van de even machten van z nul bij de machtreeks van een oneven functie.

Vermenigvuldiging

Laat $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ weer machtreeksen met convergentiestralen $R_1, R_2 > 0$ zijn. Als $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ voor $n \in \mathbf{N}$, dan convergeert de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ voor $|z| < R = \min(R_1, R_2)$ en de som is gelijk aan $f(z)g(z)$.

Voorbeeld 6.3.2 Als
$$f(z) = g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$
voor $|z| < 1$. Dan volgt voor $|z| < 1$
$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \\ &= 1 + 2z + 3z^2 + \ldots \end{aligned}$$

Compositie

Neem $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ machtreeksen met positieve convergentiestralen R_1, resp. R_2. Indien er een $\rho \in \mathbb{R}, \rho > 0$ bestaat zodat $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n < R_2$ dan convergeert de reeks
$$\sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z|^n \right)^m$$
voor $|z| \leq \rho$, en
$$g\big(f(z)\big) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m f(z)^m = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)^m$$
voor $|z| \leq \rho$. In de laatste reeks mogen we de termen herschikken naar oplopende machten van z en krijgen zo een machtreeks met som $g\big(f(z)\big)$.

Voorbeeld 6.3.3 Aangezien de som van de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ gelijk is aan e^z, volgt
$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!}, \qquad e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n z^n}{n!}.$$
Optellen en aftrekken van deze machtreeksen geeft nu
$$\cos z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!}, \qquad \sin z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Voorbeeld 6.3.4 Voor $a \neq 0$ is
$$\frac{1}{z+a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+z/a} = \frac{1}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{a} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}.$$
De convergentiestraal van deze machtreeks is gelijk aan $|a|$.

Voorbeeld 6.3.5 Schrijf

$$e^{z+z^2} = g\big(f(z)\big)$$

waarbij $f(z) = z + z^2$ en $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ machtreeksen met convergentiestraal ∞ zijn. Nu is

$$\begin{aligned} e^{z+z^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+z^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!(n-m)!} z^{n+m} = \qquad (p = n+m) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} z^p \sum_{m+n=p} \frac{1}{m!(n-m)!} = \sum_{p=0}^{\infty} z^p \sum_{m=0}^{[p/2]} \frac{1}{m!(p-2m)!} \end{aligned}$$

waarbij voor $x \in \mathbb{R}$ de *entier* $[x]$ van x gedefinieerd is als het grootste gehele getal N zodat $N \leq x$.

Reciproke

Zij $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ een machtreeks met convergentiestraal $R > 0$ en zodat $a_0 \neq 0$. De functie $g(z) = \dfrac{1}{z + a_0}$ heeft machtreeks

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{a_0^{n+1}}$$

met convergentiestraal $|a_0| > 0$. Omdat een machtreeks een continue functie is binnen zijn convergentiecirkel (dit zullen we in §2 aantonen) bestaat er een $\rho > 0$ zodat

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \rho^n < |a_0|.$$

Substitutie van de machtreeks

$$f(z) - a_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

voor z in $g(z)$ geeft een machtreeks voor

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

met convergentiestraal R' minstens gelijk aan ρ. De coefficienten van deze machtreeks kunnen we eenvoudig vinden door gebruik te maken van de identiteit

$$f(z) \cdot \frac{1}{f(z)} = 1.$$

Dan is voor $|z| < \min(R, R')$

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) z + \dots .$$

Door de coëfficiënten van z^n te vergelijken vinden we achtereenvolgens $b_0, b_1, \dots$:

$$a_0 b_0 = 1, a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0, \dots, \text{ en i.h.a. } a_n b_0 + \dots + a_0 b_n = 0.$$

De coëfficiënt van b_n in de $(n+1)$-e vergelijking is $a_0 \neq 0$ zodat we b_n kunnen uitdrukken in $b_{n-1}, \dots, b_0$ en $a_n, \dots, a_0$. Hier volgen een aantal voorbeelden.

Voorbeeld 6.3.6 Bepaal de machtreeks van $\dfrac{1}{1+z}$. Laat

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Uit

$$(1+z) \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = 1$$

volgt: $b_0 = 1, b_1 + b_0 = 0, \dots b_n + b_{n-1} = 0$ zodat $b_n = (-1)^n$ voor $n \in \mathbf{N}$ en

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n.$$

Voorbeeld 6.3.7 We berekenen de machtreeks van $\dfrac{1}{1-z-z^2}$ op twee manieren. Laat

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n.$$

Uit $(1-z-z^2) \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = 1$ volgt $F_0 = 1$, $F_1 = F_0 = 1$ en

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

voor $n \geq 2$. De getallen F_n heten de *Fibonacci-getallen* en de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$ noemen we de *voortbrengende functie* van de rij $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$. Om een expliciete uitdrukking te vinden bereken we de som van de machtreeks ook nog op een andere manier. Breuksplitsen geeft

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)} = \frac{A}{1-\alpha z} + \frac{B}{1-\beta z}$$

met $\alpha = 1/2 + \sqrt{5}/2$ en $\beta = 1/2 - \sqrt{5}/2$ en $A = 1/2 + \sqrt{5}/10$, $B = 1/2 - \sqrt{5}/10$. Het rechterlid is de som van twee meetkundige reeksen en is voor $|z| < \sqrt{5}/2 - 1/2$ gelijk aan $\sum_{n=0}^{\infty}(A\alpha^n + B\beta^n)z^n$. Het n-e Fibonaccigetal is dus gelijk aan

$$F_n = A\alpha^n + B\beta^n.$$

Deze uitdrukking maakt het mogelijk om, bijvoorbeeld, F_{110} direct te berekenen. Daar $|\alpha| > 1$ en $|\beta| < 1$ volgt bovendien

$$\lim_{n\to\infty} F_{n+1}/F_n = \alpha.$$

6.4 Analytische functies en machtreeksen.

In deze paragraaf zullen we aantonen dat machtreeksen analytische functies zijn binnen hun convergentiecirkel en dat de afgeleide van een machtreeks gelijk is aan de machtreeks die ontstaat door de machtreeks termsgewijs te differentiëren.

Propositie 6.4.1 *Een machtreeks is een continue functie binnen zijn convergentiecirkel.*

Bewijs. Laat R de convergentiestraal van de machtreeks $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Kies een punt $z_0 \in \mathbb{C}$ binnen de convergentiecirkel. We tonen aan dat f continu is in z_0. Er bestaat een $\rho \in \mathbb{R}$ zodat $|z_0| < \rho < R$. De machtreeks convergeert uniform op $\overline{U_\rho(0)} = \{|z| \leq \rho\}$ en is dus op $U_\rho(0)$ een continue functie. In het bijzonder is f continu in z_0. Daar z_0 een willekeurig punt binnen de convergentiecirkel is, is f continu op $U_R(0)$. □

Propositie 6.4.2 *Zij* $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *een machtreeks met convergentiestraal* $R > 0$. *Dan geldt:*

(i) f *is analytisch op* $U_R(0)$ *en*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

De machtreeks voor $f'(z)$ *heeft dezelfde convergentiestraal als* $f(z)$.

(ii) $f(z)$ *is oneindig vaak differentieerbaar in* $U_R(0)$.

(iii) $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ *voor* $n = 0, 1, \ldots$.

(iv) $f(z)$ *heeft op* $U_R(0)$ *een primitieve gegeven door*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} + c$$

met $c \in \mathbb{C}$.

Het omgekeerde van dit resultaat geldt ook in zekere zin. Het bewijs van de volgende stelling wordt in het college Analyse 4 gegeven.

Stelling 6.4.3 *Zij $f : G \to \mathbb{C}$ een analytische functie op een gebied G. Dan is voor elke $z_0 \in G$, $f(z)$ in een machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ met positieve convergentiestraal R te ontwikkelen (R is minstens gelijk aan de afstand van z_0 tot de rand van G). Verder is $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ voor alle $n \in \mathbf{N}$.*

Voorbeeld 6.4.4 Daar voor $|z| < 1$ de functie Log $(1+z)$ gedefinieerd is en een primitieve is van $\frac{1}{1+z}$ is de machtreeks van Log $(1+z)$ rond $z = 0$ volgens Propositie 6.4.2(4) gegeven door

$$\mathrm{Log}\,(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$$

waarbij de integratieconstante c wordt bepaald door $z = 0$ in te vullen.

Voorbeeld 6.4.5 De functie e^z is analytisch op $\mathbb{C}$ en voor de afgeleide geldt $[e^z]' = e^z$ dus de machtreeks rond $z = 0$ wordt volgens Stelling 6.4.3 gegeven door $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Rond $z = z_0$ wordt de machtreeks gegeven door $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\alpha}}{n!}(z-z_0)^n$.

Voorbeeld 6.4.6 Voor $|z| < 1$ en $\alpha \in \mathbb{C}$ is de functie $f(z) = (1+z)^{\alpha}$ analytisch; er geldt $f^{(n)}(0) = a(a-1) \cdot \ldots \cdot (a-n+1)$. Dus is $f(z)$ rond $z = 0$ in een machtreeks te ontwikkelen:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

waarbij de binomiaalcoëfficiënten gedefinieerd zijn als

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{a(a-1) \cdot \ldots \cdot (a-n+1)}{n!}.$$

Uit Propositie 3.12(3) volgt dat de machtreeks van een analytische functie uniek bepaald is. Dit resultaat hebben we al gebruikt in §2 om aan te tonen dat de machtreeks rond $z = 0$ van een even (resp. oneven) analytische functie louter uit even (resp. oneven) machten van z bestaat.

Uit Stelling 6.4.3 en Propositie 6.4.2(2) volgt dat analytische functies oneindig vaak differentieerbaar zijn en lokaal in een machtreeks te ontwikkelen zijn. In het geval van reële functies geldt iets dergelijks niet: beschouw de functie

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{voor } x \in \mathbb{R},\ x \neq 0 \\ 0 & \text{voor } x = 0 \end{cases}$$

De functie f is oneindig vaak differentieerbaar op $\mathbb{R}$ en $f^{(n)}(0) = 0$ voor alle $n \in \mathbf{N}$. f heeft dus formeel een Taylorreeks, gedefinieerd door $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) z^n/n!$, dus de Taylorreeks is overal 0 en representeert de functie $f(x)$ niet voor $x \neq 0$. In feite is f als complexe functie opgevat niet analytisch in $x = 0$, zelfs niet continu.

Voorbeeld 6.4.7 Voor $x \in \mathbb{R}, x \to 0$ is $\ln(1+x) = x + O(x^2)$. Nu is dus voor $N, M \in \mathbf{N}$ en voor zekere $C > 0$

$$\left|\sum_{n=N}^{M} \ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}\right| < C \cdot \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

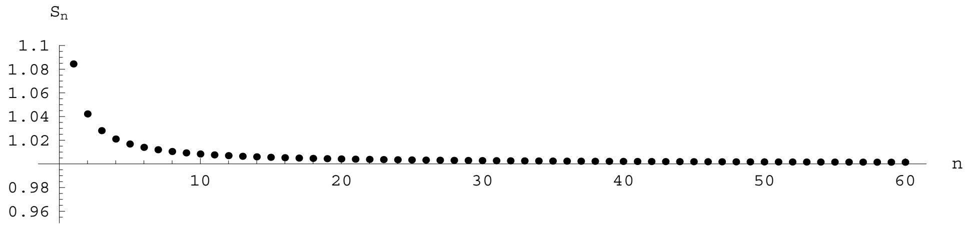
en het rechterlid convergeert naar 0 als $N \to \infty$ dus de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\ln(1+\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}\right)$$

is een Cauchyreeks en dus een convergente reeks: De som

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

heet de *constante van Euler-Mascheroni* en is gelijk aan 0,55... .



Figuur 6.2: Het begin van de rij $\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}$.

Voorbeeld 6.4.8 (*De formule van Stirling.*) We gebruiken dat $\ln(1+x) = x - x^2/2 + O(x^3)$ als $x \to 0$. Voor $n \to \infty$ is dus

$$n\ln(n+1) - n\ln n = n\ln(1+\frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

sommeren geeft dus

$$N\ln(N+1) - \ln N! = \sum_{n=1}^{N} \big(n\ln(n+1) - n\ln n\big) = N - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n} + c_N$$

waarbij $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ een convergente rij is. Met behulp van Voorbeeld 6.4.7 en het feit dat $N\ln(1+1/N) \to 1$ als $N \to \infty$ zien we dus dat $N\ln N - \ln N! - N + \frac{1}{2}\ln N$ convergeert. In feite kan worden bewezen dat de limiet gelijk is aan $-\frac{1}{2}\ln 2\pi$. Zo vinden we de *formule van Stirling voor* $n!$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1.$$

6.5 Opgaven

Opg. 1 Voor welke $z \in \mathbb{C}$ met $|z| \neq 0$ convergeren de volgende rijen (geef zo mogelijk ook de limiet aan):

a. $\left\{\dfrac{1-z^n}{1-z}\right\}_{n=1}^{\infty}$ b. $\left\{\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

c. $\left\{\dfrac{1+z^n}{1-z^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ d. $\left\{\dfrac{z^n}{1+z^{2n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Opg. 2 Onderzoek op convergentie:

$$\text{a. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\sqrt[n]{n}} \qquad \text{b. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^{n+2}\ln n}{n} \qquad \text{c. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\phi}}{n}.$$

Opg. 3 Voor welke waarden van $z \in \mathbb{C}$ convergeren de volgende reeksen:

$$\text{a. } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n\ln n} \qquad \text{b. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z^2)^n}{1+2^n}.$$

Opg. 4 Stel dat de machtreeks $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ convergeert voor $|z| < 1$. Definieer $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Bewijs dat voor alle $z \in \mathbb{C}$ met $|z| < 1$ geldt:

$$\frac{1}{1-z}\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k.$$

Toon met behulp hiervan aan dat de volgende reeksen convergeren voor $|z| < 1$ en bereken hun som:

$$\text{a. } \sum_{k=0}^{\infty} k z^k \qquad \text{b. } \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k \qquad \text{c. } \sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k.$$

Opg. 5 Bepaal de convergentiestraal van de volgende machtreeksen:

$$\text{a. } \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} z^k \qquad \text{b. } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(kz)^k}{k!} \qquad \text{c. } \sum_{k=0}^{\infty} \cos(ik)\ z^k.$$

Opg. 6 Bepaal van de volgende machtreeksen de convergentiestralen en ga na in welke punten van de convergentiecirkel ze convergeren.

a. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$ b. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ c. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{k}$
d. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k} z^{3k-1}$ e. $\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2}$ f. $\sum_{k=0}^{\infty} (a^k + a^{-k})\ z^k \quad (0 < |a| < 1)$
g. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^2+1}$ h. $\sum_{k=0}^{\infty} z^{5k}$ i. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^r r^k} \quad (r > 0)$
j. $\sum_{k=0}^{\infty} z^{k!}$ k. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} z^k$

Opg. 7 Bereken de eerste vier termen van de machtreeks rond $z = 0$ van

$$\tan z, \quad \frac{z^2}{\cosh z}, \quad \frac{z}{e^z - 1} \quad \text{en} \quad \frac{z}{\sin z}.$$

Opg. 8 Bereken de machtreeksontwikkeling rond $z = 0$ van

$$\frac{e^z}{z^2 + 1}.$$

Bepaal tevens de convergentiestraal.

Opg. 9 Bereken de reciproke van de machtreeks $1-3z+z^2$; bepaal ook de convergentiestraal.

Opg. 10 De compositie van de machtreeksen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ met convergentiestralen $R_1, R_2 > 0$ heeft een convergentiestraal $R \geq \min(R_1, R_2)$. Laat zien dat $R > \min(R_1, R_2)$ kan optreden.

Opg. 11 Bereken de eerste zes coëfficiënten in de machtreeksontwikkeling (rond $z = 0$) van

$$\sin(ze^z), \ e^{\cos z}, \ \operatorname{Log}\,(3 + z^3).$$

Opg. 12 Bereken, indien mogelijk, de volgende limieten

a. $\lim_{z \to 0} \operatorname{Log}\,(1 + z)$ b. $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z}$ c. $\lim_{z \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1)$
d. $\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$ e. $\lim_{z \to 0} \frac{\tan z}{z}$.

Opg. 13 Convergeert de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$ uniform op $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$?
En op $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 - \delta\}$ voor $0 < \delta < 1$?

Opg. 14 Toon aan dat de sommen van de volgende reeksen bestaan en continu zijn op $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

$$\text{a. } \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \sin(nz)\ z^n \qquad\qquad \text{b. } \sum_{n=1}^{\infty} n^z z^n.$$

Bibliografie

[1] T.M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, London, 1957.

[2] R. Courant, *Differential and integral calculus*, Vol. I, II, Blackie, London, 1959.

[3] J.A. Dieudonné, *Treatise on analysis*, Vol. I - V, Academic Press, London, 1969-1977.

[4] W. Kaplan, *Advanced calculus*, Addison-Wesley, 1991.

[5] R.A. Kortram, A. van Rooij, *Analyse (functies van meer veranderlijken)*, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 1990.

[6] S. Lang, *Analysis*, Vol. I, II, Addison-Wesley, London, 1968, 1969;

[7] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, New York, 1976.

[8] W. Walter, *Analysis 1, 2,* Springer-Lehrbuch 7$^{\text{de}}$ ed., 5$^{\text{de}}$ ed., Springer, Heidelberg, 2004, 2002.