Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2009/2010

Analysis I
Aufgaben der Nachklausur vom 15. März 2010

Aufgabe 1: Berechnen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ von $z^3 + i = 0$.

Aufgabe 2: a) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wie ist $\lim\limits_{t \downarrow 0} f(t) = a$ definiert?

b) Berechnen Sie

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - \cos\left(\sqrt{t}\right)}{t}.$$

Aufgabe 3: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

a) Ist f stetig in 0?

b) Ist f differenzierbar in 0?

Aufgabe 4: Gegeben ist

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + x}.$$

a) Berechnen Sie eine Stammfunktion.

b) Existiert $\displaystyle\int_{-2}^{2} g(x)\, dx$?

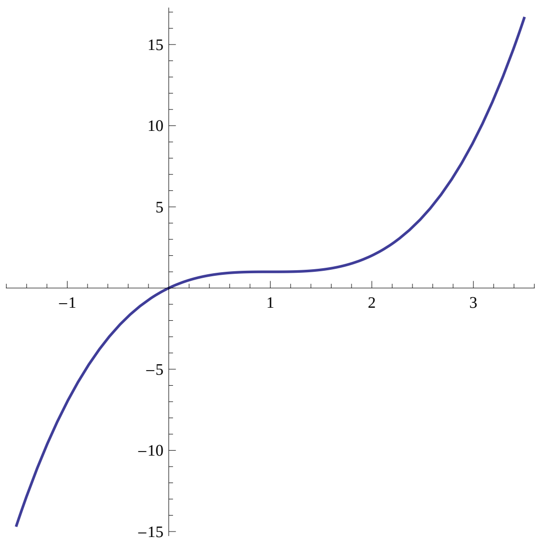
Aufgabe 5: Wir betrachten $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = 3x - 3x^2 + x^3.$$

Der Graph der Funktion ist in nebenstehender Abbildung skizziert.

a) Zeigen Sie, dass h eine Inverse hat.

b) Wir nennen die inverse Funktion g. Es gilt $g(9) = 3$. Berechnen Sie $g'(9)$.



Aufgabe 6: Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$.

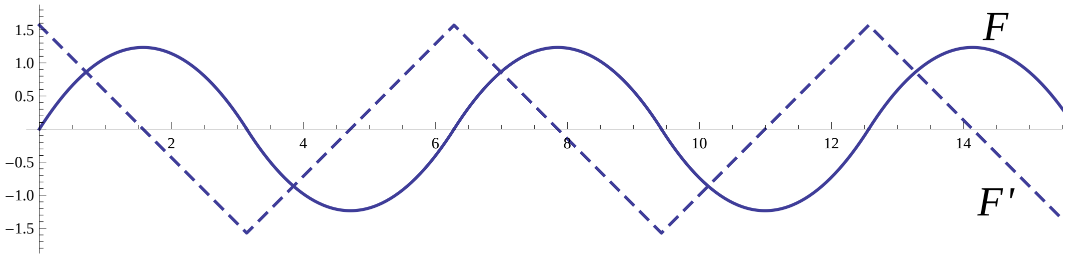
Aufgabe 7: Ist die folgende Aussage wahr oder nicht wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.
Für alle reellen Folgen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n, b_n \geq 0$ gilt

$$\limsup_{n \to \infty} a_n b_n = \limsup_{n \to \infty} a_n \, \limsup_{n \to \infty} b_n.$$

Aufgabe 8: Wir betrachten

$$F(x) = \int_0^x \arcsin(\cos(s))\, ds.$$

Die Graphen von F und F' sehen wie folgt aus:



Berechnen Sie

a) $F'\left(\frac{1}{2}\pi\right)$,

b) $F''\left(\frac{1}{2}\pi\right)$,

c) $F\left(\frac{1}{2}\pi\right)$.

Hinweis: Es gilt $\frac{d}{dt}\arcsin(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

Aufgabe 9: Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{1+n^3} z^n$?

Aufgabe 10: Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$2^{n+1} \geq n^2 + n + 2.$$